SÉRIE VIII. — TOME VIII. N° 5. MAI 1947.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

DÉTERMINATION DES CONSTANTES DE DIFFUSION THERMIQUE ET DE DIFFUSION ORDINAIRE A PARTIR DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX DE L'EFFET SORET PUR

Par S. R. DE GROOT.

Laboratoire de Chimie nucléaire du Collège de France.

Sommaire. — Un procédé est donné pour déduire les constantes de diffusion et de diffusion thermique des mesures faites par la méthode statique de la diffusion thermique dans les phases condensées (effet Soret pur). A cette fin, on utilise les formules phénoménologiques développées pour le cas des solutions diluées, en les appliquant aux mesures des changements de concentration en fonction du temps. Les données expérimentales peu nombreuses ainsi que deux questions particulières (d'ordre métallurgique et géologique) sont discutées.

1. **Introduction**. — On appelle « diffusion thermique » (ou « thermodiffusion » ou parfois encore « effusion thermique ») le phénomène qui consiste en ce qu'un gradient de température, dans une solution ou dans un mélange (constitué par une seule phase), donne naissance à un gradient de concentration. La diffusion thermique ne se produit pas seulement en phase gazeuse, mais aussi en phase condensée (liquide ou solide) et est désignée sous le nom « d'effet Soret » dans ce dernier cas.

Les expériences sur l'effet Soret se font à l'aide de deux dispositifs expérimentaux très différents. Dans le premier, que je désignerai sous le nom d' « effet Soret pur » [1], le mélange se trouve entre deux plaques horizontales dont l'une supérieure est chauffée et l'autre inférieure refroidie. A l'intérieur du mélange un courant de matière se produit par diffusion thermique et il s'établit donc un gradient de concentration. Ce gradient, à son tour, provoque un courant de matière par diffusion ordinaire qui tend à s'opposer au courant de diffusion thermique jusqu'à ce que dans l'état stationnaire les deux courants s'annulent. Dans ce mémoire, il ne sera question que de l' « effet Soret pur » et donc pas de l'autre dispositif, le « procédé thermogravitationnel » de Clusius et Dickel, où les parois chaude et froide sont verticales et où l'effet de séparation est considérablement agrandi [2].

La théorie phénoménologique a pour but de décrire la dépendance de la concentration vis-à-vis des coordonnées de l'espace et du temps, quand la concentration initiale et les dimensions de l'appareil, ainsi que les constantes caractéristiques des corps employés, sont connues. D'autre part, on peut déduire les constantes de diffusion ordinaire et thermique à partir de données expérimentales sur les concentrations en appliquant les formules de la théorie phénoménologique. Jusqu'à maintenant, on n'avait tiré des conclusions que de l'état stationnaire. Il est pourtant très utile d'utiliser aussi les mesures de concentration en fonction du temps avant que l'état stationnaire ne se soit établi, ce qu'on peut faire en employant la théorie phénoménologique de l'effet Soret sous la forme qui décrit aussi la dépendance du temps [1]. On verra alors que les constantes de diffusion ordinaire et thermique peuvent être trouvées indépendamment et que la théorie phénoménologique peut être vérifiée. Si l'on n'emploie que les données de l'état stationnaire, on n'arrive qu'au quotient des constantes citées.

2. **Définitions des constantes de diffusion**

ordinaire et thermique de liquides et de solides. Coefficient de Soret. — Considérons un mélange de deux espèces de molécules et envisageons-en une plus particulièrement. J'indiquerai la concentration de ce composant par c (celle de l'autre par c').

La constante de diffusion D est généralement définie par la loi de Fick : le flux de matière J_x provoqué par un gradient de concentration $\frac{\partial c}{\partial x}$ est proportionnel à ce gradient

$$J_x = - D \frac{\partial c}{\partial x}. \qquad (1)$$

Par concentration c, on entend ici le poids du composant (exprimé en grammes, en molécules-grammes ou en d'autres unités) contenu dans l'unité de volume. Une autre définition est celle utilisant la notion de concentration relative ou fraction n :

$$n = \frac{c}{c + c'} = \frac{c}{\rho} \qquad (2)$$

et exprimant que le flux de matière est proportionnel au gradient de la concentration relative

$$J_x = - D \rho \frac{\partial n}{\partial x}, \qquad (3)$$

où l'on a ajouté la densité $\rho = c + c'$ afin que J_x reste un flux (c'est-à-dire une masse parcourant l'unité de surface dans l'unité de temps).

Les deux définitions sont évidemment équivalentes quand la densité $\rho = c + c'$ est uniforme. Mais cette dernière condition n'est plus remplie quand un gradient de température existe, comme c'est le cas quand on considère la diffusion thermique. Il se produit alors un flux de matière additionnel qu'on suppose habituellement proportionnel au gradient de température $\frac{\partial T}{\partial x}$ et aux concentrations

$$- D' \frac{cc'}{c + c'} \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad (4)$$

ce qui est égal à

$$- D' \rho n n' \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad (5)$$

où la constante de proportionnalité D' est dite « constante de diffusion thermique ». Ce D' est surtout employé dans le cas des solides et des liquides (pour les gaz on écrit souvent $\frac{\alpha D}{T}$ au lieu de D' et l'on appelle parfois $\alpha D n n'$ et parfois α coefficient de diffusion thermique).

En réalité, les grandeurs D et D' ne sont pas exactement constantes, elles sont au contraire des fonctions de la concentration et de la température. Toutefois, pour des intervalles de concentrations et de températures pas trop grands, on peut supposer que D et D' sont approximativement constants.

Somme toute, on a, pour le flux total, deux expressions possibles : celle utilisant la première définition de D

$$J_x = - D \frac{\partial c}{\partial x} - D' \frac{cc'}{c + c'} \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (6)$$

$$= - D \frac{\partial n \rho}{\partial x} - D' \rho n n' \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad (7)$$

ou bien, en employant la deuxième définition de D :

$$J_x = - D \rho \frac{\partial \frac{c}{\rho}}{\partial x} - D \frac{cc'}{c + c'} \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (8)$$

$$= - D \rho \frac{\partial n}{\partial x} - D' \rho n n' \frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (9)$$

Formellement, l'une de ces expressions est équivalente à l'autre, mais dans la pratique, la seconde est supérieure à la première. Pour trancher cette question, supposons un mélange dont la température, initialement uniforme, vient de devenir hétérogène. Or, dans l'expérience, la dilatation ou le rétrécissement thermique a déjà eu lieu tout entier avant qu'une diffusion ou une diffusion thermique sensible ne se soit produite. A ce moment, les concentrations relatives n et n' sont donc toujours uniformes, mais les concentrations $c = n\rho$ et $c' = n'\rho$ ne le sont plus (non-uniformité de ρ). Cet état est l'état initial de bon nombre d'expériences. Dans le cas général, il se produit un courant de matière après l'application du gradient de température. La seconde expression dit alors qu'initialement ce courant est exclusivement le courant de diffusion thermique parce qu'alors le courant de diffusion ordinaire est encore zéro $\left(\frac{\partial n}{\partial x} = 0\right)$. Cette manière de décrire est plus simple et plus affirmative que celle utilisant l'expression (6, 7) où l'on a, dès le commencement, les deux courants à la fois $\left(\frac{\partial c}{\partial x} \neq 0 \text{ et } \frac{\partial T}{\partial x} \neq 0\right)$. Il est donc clair qu'avec la condition initiale « n uniforme », la forme (8, 9) est, du point de vue mathématique, plus commode que (6, 7).

Cela est particulièrement évident dans le cas spécial des corps où il ne se produit plus de migration de matière $J_x = 0$ après l'établissement du champ de température, c'est-à-dire là où l'état initial décrit est aussi l'état final. Alors, en adoptant la première expression pour J_x (6, 7), on serait contraint de dire que le courant de diffusion ordinaire contrebalance exactement le courant de diffusion thermique. Dans l'autre expression (8,9) au contraire, le premier terme s'annule parce que $\frac{\partial n}{\partial x} = 0$ et comme $J_x = 0$, le second terme s'annule aussi. Dans ce cas, il faut donc dire que la diffusion thermique ne se fait pas sentir, énoncé plus satisfaisant du point de vue physique que celui de la première expression.

Une combinaison utile et qu'on rencontre souvent est le rapport

$$s = \frac{D'}{D}, \qquad (10)$$

qu'on appelle « coefficient de Soret ». L'inverse de s a la dimension d'une température et l'on pourrait l'appeler « température caractéristique de Soret ». Le coefficient de Soret joue un rôle quand on étudie l'état stationnaire, où le flux de convection s'annule. Alors on a, avec la première expression (6)

$$s = \frac{D'}{D} = -\frac{c + c'}{cc'}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}T} \qquad (11)$$

et avec la seconde (9)

$$s = \frac{D'}{D} = -\frac{1}{nn'}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}. \qquad (12)$$

Évidemment, les seconds membres de ces formules ne sont pas égaux. La différence est loin d'être négligeable; elle est égale à

$$-\frac{1}{n'\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}T} \qquad (13)$$

de l'ordre de grandeur des coefficients de Soret.

Si l'un des composants est peu concentré ($c \ll c'$, $n \ll 1$), les formules se simplifient un peu : les deux expressions (6,7) et (8,9) pour le flux de molécules deviennent respectivement

$$J_x = -D\frac{\partial c}{\partial x} - D'c\frac{\partial T}{\partial x} = -D\frac{\partial n\rho}{\partial x} - D'\rho n\frac{\partial T}{\partial x} \quad (14)$$

et

$$J_x = -D\rho\frac{\partial \frac{c}{\rho}}{\partial x} - D'c\frac{\partial T}{\partial x} = -D\rho\frac{\partial n}{\partial x} - D'\rho n\frac{\partial T}{\partial x} \quad (15)$$

et les deux expressions (11) et (12) pour le coefficient de Soret sont alors

$$s = \frac{D'}{D} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}T} \qquad (16)$$

et

$$s = \frac{D'}{D} = -\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}, \qquad (17)$$

dont la différence est égale à

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}T} = \beta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T} \qquad \text{avec} \quad \beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T},$$

le coefficient de dilatation thermique.

J'emploierai la deuxième définition de D (3, 8, 9, 12, 15, 17).

3. **Les formules de l'effet Soret pur d'une solution diluée.** — Dans le cas où le premier composant est relativement dilué ($n \ll 1$), le problème phénoménologique peut être rigoureusement traité [1]. Je me bornerai, toutefois, à donner ici une formule approximative qui suffit dans tous les cas empiriques [1]

$$\frac{n}{n_0} = 1 + \left(1 - e^{-\frac{t}{\Theta}}\right)\left(\frac{p}{1 - e^{-p}}e^{-p\xi} - 1\right), \qquad (18)$$

où

n_0 est la concentration initiale;

t, le temps;

$\Theta = \frac{a^2}{\pi^2 D}$;

a, la distance entre plaque inférieure et supérieure;

D, la constante de diffusion;

$p = \frac{D'\tau}{D}$;

D', la constante de diffusion thermique;

τ, la différence de température entre les deux plaques;

$\xi = \frac{x}{a}$;

x, est la coordonnée dans la direction verticale, l'origine étant dans la plaque inférieure (froide); l'autre plaque (la chaude) se trouve donc à $x = a$.

La formule (18) donne la concentration par rapport à la concentration initiale $\frac{n}{n_0}$ en fonction de Θ, t, p et ξ. Les valeurs les plus intéressantes de n sont celles où $x = 0$ et $x = a$, c'est-à-dire la concentration n_i en bas de l'appareil et n_s en haut de celui-ci. Comme mesure du changement de concentration résultant de l'effet Soret, on prend le rapport

$$\frac{n_i}{n_s} = \frac{1 + \left(1 - e^{-\frac{t}{\Theta}}\right)\left\{p(1 - e^{-p})^{-1} - 1\right\}}{1 + \left(1 - e^{-\frac{t}{\Theta}}\right)\left\{p(e^{p} - 1)^{-1} - 1\right\}}, \qquad (19)$$

dont l'allure en fonction de t est tracée sur la figure 1 (*voir* § 4). Pour les cas-limites des temps d'expérience courts ($t \ll \Theta$) et longs ($t \gg \Theta$), on obtient

$$\left(\frac{n_i}{n_s}\right)_{t \to 0} = 1 + \frac{pt}{\Theta} = 1 + \frac{\pi^2 D'\tau t}{a^2}, \qquad (20)$$

$$\left(\frac{n_i}{n_s}\right)_{t \to \infty} = e^{p} = e^{\frac{D'\tau}{D}}. \qquad (21)$$

Ces dernières formules sont d'une importance particulière quand la courbe des valeurs de $\frac{n_i}{n_s}$ en fonction de t est entièrement déterminée expérimentalement pour des valeurs de a et τ connues. On peut alors calculer la valeur de D' à l'aide de (20) et de la pente de la courbe de $\frac{n_i}{n_s}$ en fonction de t à l'origine (et cela sans que D doive être connu). La valeur de $\frac{n_i}{n_s}$ pour t grand fournit le coefficient de Soret $\frac{D'}{D}$. On a ainsi obtenu les constantes de diffusion ordinaire et thermique. Parfois la valeur de D est déjà connue par d'autres expériences. Dans ce cas, il suffit de déterminer la tangente à $t = 0$ ou bien la valeur de $\left(\frac{n_i}{n_s}\right)$ à $t \gg \Theta$ pour trouver D'. Jusqu'à présent, on n'a pas utilisé cette dernière méthode parce qu'on ne connaissait que la loi de l'état stationnaire [(21) ou 24)].

Notons encore que la différence relative des concentrations en haut et en bas de l'appareil est aussi une mesure du déplacement des concentrations :

$$\frac{n_i - n_s}{n_0} = p\left(1 - e^{-\frac{t}{\Theta}}\right), \qquad (22)$$

dont la figure 2 (*voir* § 4) donne des exemples. Les lois-limites de (22) sont

$$\left\{\frac{n_i - n_s}{n_0}\right\}_{t \to 0} = \frac{pt}{\Theta} = \frac{\pi^2 D' \tau t}{a^2} \qquad (23)$$

et

$$\left\{\frac{n_i - n_s}{n_0}\right\}_{t \to \infty} = p = \frac{D'\tau}{D}. \qquad (24)$$

L'emploi de ces formules est le même que celui de (19), (20) et (21).

4. **Confrontation avec l'expérience.** — Dans ses expériences Wereide [3] a déterminé $\frac{n_i}{n_s}$ en fonction de t pour nombre de solutions aqueuses. Les formules à employer sont donc (19), (20) et (21). On tire la constante p de la valeur finale de $\frac{n_i}{n_s}$ avec (21). On peut alors calculer grossièrement l'autre constante Θ à l'aide de la pente initiale des courbes (*fig.* 1) avec (20). Cette valeur de Θ est considérée comme une première approximation Θ_0.

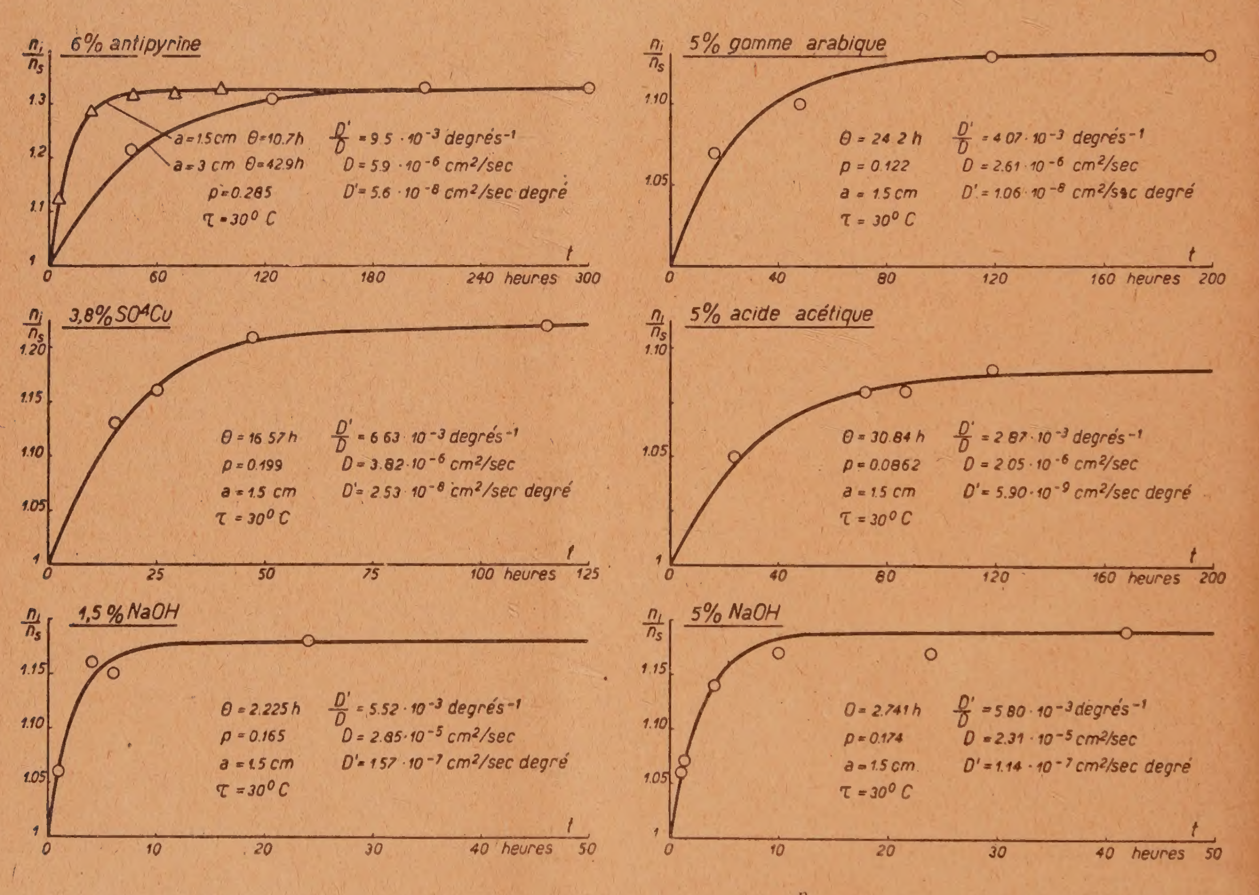


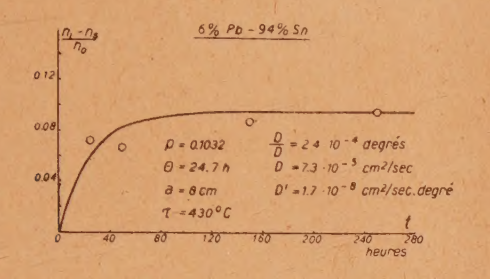
Fig. 1. — Effet Soret de solutions aqueuses. Rapport des concentrations $\frac{n_i}{n_s}$ en fonction du temps t. Mesures de Wereide. $p = \frac{D'}{D}\tau$; $\Theta = \frac{a^2}{\pi^2 D}$; $\frac{D'}{D}$, coefficient de Soret; D, coefficient de diffusion ordinaire; D', coefficient de diffusion thermique; a, écartement des plaques; τ, différence de températures des plaques.

Pour trouver une valeur plus exacte, j'ai appliqué la méthode des moindres carrés à l'ensemble des points expérimentaux. Comme $\frac{n_i}{n_s}$ n'est pas une série de puissances en Θ, j'ai développé d'abord $\frac{n_i}{n_s}$ en une série de Taylor par rapport aux déviations $\Theta - \Theta_0$ de la valeur grossière Θ_0, puis j'ai employé la méthode des moindres carrés. Les résultats des calculs sont indiqués par les courbes de la figure 1. A partir de ces meilleures valeurs de p et Θ, les constantes D' et D peuvent être calculées toutes deux. [Jusqu'à présent, on n'avait utilisé

l'allure des courbes que pour s'assurer si l'état stationnaire était atteint et l'on n'appliquait que (21) pour calculer $\frac{D'}{D}$, le coefficient de Soret.]

Dans le cas de l'antipyrine, Wereide avait employé deux écartements a différents. La proportionnalité à a^{-2} de la pente initiale, que la théorie prédit, est bien confirmée par l'expérience ainsi que le fait que $\frac{n_i}{n_s}$ tend vers une valeur finale qui ne dépendpas de a.

Les expériences très curieuses de Ballay [4] sur l'effet Soret dans des solutions liquides métalliques exigent une technique compliquée et difficile, mais sont, néanmoins, très précises. Les résultats sont importants dans la discussion d'une question de métallurgie (*voir* § 5). Ballay détermine $n_i - n_s$ et j'utilise donc les formules (22), (23) et (24) pour déterminer, d'une manière analogue à celle décrite plus haut, les grandeurs p et Θ, puis D' et D. Les résultats sont indiqués dans la figure 2.



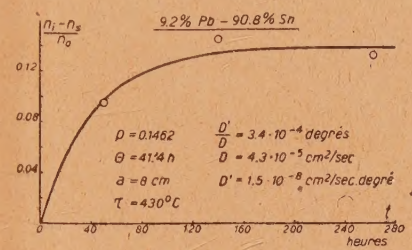


Fig. 2. — Effet Soret dans un alliage plomb-étain. Différence relative des concentrations $\frac{n_i - n_s}{n_0}$ en fonction du temps t. Mesures de Ballay. Signification des symboles : *voir* figure 1.

L'exactitude des mesures de Wereide et Ballay est satisfaisante surtout en considération du fait, qu'après chaque mesure, il a fallu recommencer l'expérience.

Tanner [5] et Chipman [6] ont développé des méthodes, où les concentrations sont mesurées en fonction du temps dans une seule expérience et de façon continue. Cela se faisait soit par détermination de la conductibilité électrique [5], soit par la méthode de déviation de rayons lumineux [6]. Ces procédés se prêtent donc beaucoup plus que les techniques discontinues de Ballay et de Wereide à l'étude de la dépendance des concentrations n de t. Malheureusement, Tanner et Chipman ne fournissent pas beaucoup de résultats sur la fonction $n(t)$, qu'ils n'utilisent que pour contrôler si l'état final est atteint.

5. **Sur l'influence possible de l'effet Soret dans les liquides sur la ségrégation inversée des alliages** [7]. — Une catégorie spéciale d'hétérogénéités qui se présente dans les lingots d'alliages (ségrégation inversée ou « liquation ») était attribuée par certains métallurgistes à l'action de l'effet Soret à l'état liquide. D'autres auteurs avaient combattu ce point de vue.

Ballay [4] avait trouvé que l'effet Soret se fait nettement sentir dans les alliages liquides et que le ocefficient de Soret ne change pas de signe pour une composition correspondant au point eutectique, comme beaucoup de métallurgistes l'avaient cru. Il fait remarquer toutefois qu'il est peu probable que l'effet Soret puisse donner une variation de concentration sensible dans les moulages.

Cette affirmation peut être confirmée d'une façon quantitative en utilisant la formule (22), qui fournit la variation de concentration maximum, c'est-à-dire quand il n'y a pas de courants de convection qui empêchent le gradient de concentration de se former dans le mélange. Avec les ordres de grandeurs, tirés des expériences de Ballay de $\frac{D'}{D} = 3.10^{-4}$ degrés^{-1} et de $D = 4.10^{-5}$ cm² : s, ainsi que de la pratique métallurgique $\tau = 300°$ C et $t = 100$ s, on trouve $\frac{n_i - n_s}{n_0} = 0{,}000\,9$ quand $a = 2$ cm. On voit donc que, même avec ces valeurs très élevées de $\frac{D'}{D}$, et τ et celle faible de a, l'effet Soret est insignifiant dans un moulage.

6. **Sur le rôle possible de l'effet Soret dans les liquides pour expliquer la différenciation magmatique** [7]. — Pour expliquer la différenciation magmatique on a pensé souvent, entre autres choses, à l'influence possible de l'effet Soret de l'état liquide. Ce point de vue a été défendu ou combattu par un très grand nombre d'auteurs, qui ont fait des spéculations sur le signe de l'effet Soret de certains corps chimiques des magmas, tout en se basant sur des points de vue qualitatifs ou sur des théories périmées.

Si l'on avait déterminé les constantes D' et D des magmas dans le laboratoire on pourrait calculer, à l'aide de la formule (22), la valeur finale et le temps d'établissement des variations de concentrations, si les grandeurs a, largeur de la couche

magmatique, τ, différence de température (qui peut dépendre du temps) et t, le temps étaient connues. Or, on n'a jamais déterminé $\frac{D'}{D}$ ou D' pour un mélange de silicates et les valeurs de D ne sont pas très sûres. Toutefois, je veux indiquer quelques ordres de grandeur qui me semblent admissibles. Le coefficient de Soret $\frac{D'}{D}$ peut être estimé à 10^{-4} à 10^{-3} degrés^{-1}, chiffres empruntés à des calculs faits sur les résultats de Ballay [4], qui portaient sur des alliages liquides. Avec $\tau = 100$ centigrades, on arrive à une valeur de

$$\left\{\frac{n_i - n_s}{n_0}\right\}_{t \to \infty} = p = \frac{D'\tau}{D} = 10^{-2} \text{ à } 10^{-1}.$$

En acceptant la valeur $D = 0{,}25\ \text{cm}^2$: jour de Bowen [8], on trouve, pour $\Theta = \frac{a^2}{\pi^2 D}$, des valeurs comme par exemple 6 min si $a = 1$ mm, 1100 années si $a = 10$ m et 10^7 années si $a = 1$ km [faisons encore remarquer que, d'après (22), l'état final est pratiquement atteint (à 0,3 pour 100 près) après un temps 5 Θ]. A mon avis, il ressort de ces chiffres que l'effet Soret ne peut pas se faire sentir dans les grands bassins magmatiques. Mais il pourrait être une des causes de différenciation à petite échelle et jouer parfois un rôle dans les dykes.

Manuscrit reçu le 7 juillet 1947.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. R. de Groot, *Physica*, 1942, **9**, p. 699.
[2] *Voir* références dans R. Clark Jones et W. H. Furry, *Rev. Mod. Phys.*, 1946, **18**, p. 151; S. R. de Groot, *L'effet Soret*, 1945.
[3] Th. Wereide, *Ann. de Physique*, 1914, [9], **2**, p. 55.
[4] M. Ballay, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1926, **183**, p. 603; *Rev. Métallurgie* (Mémoires), 1928, **25**, p. 427.
[5] C. C. Tanner, *Trans. Faraday Soc.*, 1927, **23**, p. 75.
[6] J. Chipman, *J. Amer. chem. Soc.*, 1926, **48**, p. 2577.
[7] Pour une discussion plus complète et pour les références sur les questions des paragraphes **5** et **6**, *voir* paragraphes **19** et **20** de S. R. de Groot, *L'effet Soret*.
[8] N. L. Bowen, *J. Geol.*, Chicago, 1921, **29**, p. 295.

SUR LES ÉQUATIONS D'ONDES DU SECOND ORDRE POUR LES CORPUSCULES DE SPIN $\frac{h}{4\pi}$ DANS LES CHAMPS EXTÉRIEURS

Par Gérard PETIAU.
Institut Henri-Poincaré.

Sommaire. — Étude des équations d'ondes du second ordre pour le corpuscule de spin $\frac{h}{4\pi}$ représenté par l'équation d'onde relativiste de l'électron de Dirac dans le cas où le terme d'interaction ne dépend plus uniquement du quadripotentiel vecteur électromagnétique, mais est de la forme la plus générale possible. Les équations obtenues sont ensuite spécialisées au cas où l'interaction est, soit électromagnétique la plus générale, soit mésique suivant les différentes représentations du méson. Les équations obtenues mettent en évidence les différents termes d'énergie potentielle, classiques et non classiques, résultant de l'action des champs considérés sur le corpuscule.

La théorie de l'électron de Dirac représente le corpuscule de spin $\frac{h}{4\pi}$ et de masse m_0 par les solutions de l'équation d'ondes

$$[p_\mu \gamma^\mu + i m_0 c]\psi = 0 \tag{1}$$

$$\left(p_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu},\ x^4 = ict,\ \mu = 1, 2, 3, 4,\ \hbar = \frac{h}{2\pi}\right),$$

les γ^μ étant quatre matrices telles que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu},$$

le corpuscule considéré ne subissant l'action d'aucun champ extérieur.

Lorsque le corpuscule est un électron de charge $-e$ placé dans un champ électromagnétique extérieur de quadripotentiel Φ_μ, l'équation (1) doit être remplacée par l'équation

$$\left[p_\mu \gamma^\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu \gamma^\mu + i m_0 c\right]\psi = 0. \tag{2}$$

Mais l'équation (1) a été considérée par de nombreux auteurs comme susceptible de représenter d'autres corpuscules de spin $\frac{h}{4\pi}$. Afin de tenir compte des propriétés que possèdent ces corpuscules et qui sont différentes de celles de l'électron, ils ont été conduits à modifier le terme d'interaction $\frac{e}{c}\Phi_\mu \gamma^\mu$ et à le

remplacer par d'autres invariants construits sur les grandeurs caractéristiques du champ extérieur et sur les opérateurs caractéristiques du corpuscule, représentés par les matrices combinaisons des γ^μ.

Posant

$$\gamma^{\mu\nu} = \gamma^\mu\gamma^\nu - \delta^{\mu\nu} = -\gamma^{\nu\mu},$$
$$\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \delta^{\mu\nu}\gamma^\rho - \gamma^\mu\delta^{\nu\rho} + \gamma^\nu\delta^{\mu\rho},$$
$$\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \qquad \gamma^{5\mu} = \gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5, \qquad \gamma^0 = 1,$$

ces invariants s'écrivent

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{J}\gamma^0, \quad \Phi_\mu\gamma^\mu, \quad \Phi_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}, \quad \Phi_{\mu\nu\rho}\gamma^{\mu\nu\rho} = \Phi_{5\mu}\gamma^{5\mu}, \\ \Phi_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = \Phi_5\gamma_5. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Φ_0, Φ_μ, $\Phi_{\mu\nu}$, $\Phi_{5\mu}$, Φ_5 sont des potentiels ou des champs caractéristiques des interactions auxquelles satisfont les corpuscules et il leur correspond des constantes d'interaction f ou g remplaçant la charge e.

Dans le cas où l'équation (2) est remplacée par

$$[p_\mu\gamma^\mu + f\Phi_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} + im_0c]\psi = 0, \qquad (4)$$

$\Phi_{\mu\nu} = -\Phi_{\nu\mu}$ étant le tenseur antisymétrique du second ordre champ électromagnétique, nous rencontrons l'équation proposée par H. A. Bethe pour représenter le neutrino possédant un moment magnétique propre (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1935, t. 31, p. 108-115) et étudiée également par Caldirola (*Phys. Rev.*, 15 juin 1946, **69**, p. 608-610).

Dans le cas où les Φ_μ, $\Phi_{\mu\nu}$, $\Phi_{\mu5}$, Φ_5 sont des champs mésiques, l'introduction des invariants (3), isolément ou en combinaisons, correspond aux diverses formes proposées pour représenter le nucléon dans un champ mésique et sert de base à la théorie des forces nucléaires.

Dans la théorie de l'électron, la correspondance entre les propriétés des corpuscules représentés par les solutions de (2) et les propriétés classiques de l'électron se déduit des propriétés d'une équation aux dérivées partielles du second ordre satisfaite par ψ et déduite de (2) par itération.

Nous nous proposons ici de chercher cette équation du second ordre pour les différents termes d'interaction de la forme (3).

Dans le cas de l'électron, l'itération de (2) écrite sous la forme

$$\left[p_\mu\gamma^\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu\gamma^\mu\right]\psi = -im_0c\psi,$$

nous donne immédiatement

$$\left[p_\mu p^\mu + \frac{2e}{c}\Phi_\mu p^\mu + \frac{e^2}{c^2}\Phi_\mu\Phi^\mu + m_0^2c^2 + \frac{e}{c}i\hbar(\partial_\mu\Phi_\nu - \partial_\nu\Phi_\mu)\gamma^{\mu\nu} + \frac{e}{c}i\hbar(\partial_\mu\Phi^\mu)\gamma_0\right]\psi = 0.$$

Introduisant le moment

$$\Pi_\mu = p_\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu$$

et définissant le champ électromagnétique extérieur $F_{\mu\nu}$ par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi_\nu - \partial_\nu\Phi_\mu,$$

cette équation s'écrit

$$\left[\Pi_\mu\Pi^\mu + \frac{e}{c}\hbar F_{\mu\nu}(i\gamma^{\mu\nu}) + m_0^2c^2\right]\psi = 0. \qquad (5)$$

On montre que, pour que cette équation corresponde à l'équation de propagation déduite de l'hamiltonien de la mécanique de l'électron classique, il est nécessaire de la multiplier par le facteur $\frac{1}{2m_0c}$, d'où

$$\left\{\frac{1}{2m_0c}[\Pi_\mu\Pi^\mu + m_0^2c^2] + \frac{eh}{4\pi m_0c}F_{\mu\nu}(i\gamma^{\mu\nu})\right\}\psi = 0 \qquad (6)$$

et cette équation met en évidence la présence d'une énergie potentielle

$$\frac{eh}{4\pi m_0c}F_{\mu\nu}i\gamma^{(\mu\nu)}$$

sans correspondant en théorie classique et liée à l'existence pour l'électron de Dirac d'un moment électromagnétique propre

$$\frac{eh}{4\pi m_0c}[i\gamma^{\mu\nu}].$$

Dans le cas général que nous considérons, l'équation (2) sera remplacée par l'équation

$$\{p_\mu\gamma^\mu + g_1\Phi_\mu\gamma^\mu + f_1\Phi_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} + f_2\Phi_{5\mu}\gamma^{5\mu} + g_2\Phi_5\gamma^5\}\psi = -i[m_0c + g_0\mathcal{J}]\psi. \qquad (7)$$

Dans le cas particulier où $f_1 = f_2$, $g_1 = g_2$, cette équation s'écrira encore, en introduisant la coordonnée x_5 avec la condition $\frac{\partial}{\partial x^5}\psi = 0$,

$$[p_\alpha\gamma^\alpha + g\Phi_\alpha\gamma^\alpha + f\Phi_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}]\psi = -i[m_0c + g_0\mathcal{J}]\psi \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (8)$$

Nous obtiendrons les équations du second ordre cherchées en itérant les équations (7) ou (8).

Si nous itérons (8), nous obtenons immédiatement

$$\begin{aligned}\{&p_\alpha p^\alpha + g\Phi_\beta p_\alpha(\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha) \\ &+ f\Phi_{\gamma\delta}p_\alpha(\gamma^\alpha\gamma^{\gamma\delta} + \gamma^{\gamma\delta}\gamma^\alpha) + g^2\Phi_\alpha\Phi^\alpha \\ &+ fg\Phi_\alpha\Phi_{\gamma\delta}(\gamma^\alpha\gamma^{\gamma\delta} + \gamma^{\gamma\delta}\gamma^\alpha) \\ &+ f^2\Phi_{\gamma\delta}\Phi_{\gamma'\delta'}\gamma^{\gamma\delta}\gamma^{\gamma'\delta'} + (m_0c + g_0\mathcal{J})^2 \\ &+ i\hbar g(\partial_\alpha\Phi_\beta - \partial_\beta\Phi_\alpha)\gamma^{\alpha\beta} + i\hbar g\,\partial_\alpha\Phi^\alpha \\ &+ i\hbar f\,\partial_{[\alpha}\Phi_{\gamma\delta]}\gamma^{[\alpha\gamma\delta]} + i\hbar f\,\partial_\alpha\Phi^{\alpha\beta}\gamma_\beta - i\hbar g_0(\partial_\alpha\mathcal{J})\gamma^\alpha\}\psi = 0.\end{aligned}$$

Si nous remarquons que

$$\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\gamma\delta}\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\gamma\delta} = \Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\gamma\delta}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}\gamma_\varepsilon - \Phi_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\gamma_0$$
$$(\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_\varepsilon = \pm 1),$$
$$\Phi_\alpha\Phi_{\gamma\delta}(\gamma^\alpha\gamma^{\gamma\delta} + \gamma^{\gamma\delta}\gamma^\alpha) = 2\Phi_{[\alpha}\Phi_{\gamma\delta]}\gamma^{[\alpha\gamma\delta]},$$

nous obtiendrons l'équation

$$\begin{aligned}\{&p_\alpha p^\alpha + 2g\Phi_\alpha p^\alpha + 2f\Phi_{[\gamma\delta}p_{\alpha]}\gamma^{\alpha\gamma\delta} + g^2\Phi_\alpha\Phi^\alpha \\ &+ 2fg\Phi_{[\alpha}\Phi_{\gamma\delta]}\gamma^{\alpha\gamma\delta} \\ &+ f^2(\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\gamma\delta}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}\gamma_\varepsilon - \Phi_{\alpha\beta}\Phi^{\alpha\beta}\gamma_0) \\ &+ (m_0c + g_0\mathcal{J})^2 + i\hbar g(\partial_\alpha\Phi_\beta - \partial_\beta\Phi_\alpha)\gamma^{\alpha\beta} \\ &+ i\hbar g\,\partial_\alpha\Phi^\alpha + i\hbar f\,\partial_{[\alpha}\Phi_{\gamma\delta]}\gamma^{\alpha\gamma\delta} \\ &+ i\hbar f\,\partial_\alpha\Phi^{\alpha\beta}\gamma_\beta - \hbar g_0(\partial_\alpha\mathcal{J})\gamma^\alpha\}\psi = 0. \qquad (9)\end{aligned}$$

Si nous posons

$$\Pi_\alpha = p_\alpha + g\Phi_\alpha + f\Phi^{\gamma\delta}\gamma_{\gamma\delta\alpha}. \qquad (10)$$

nous avons

$$\Pi_\alpha \Pi^\alpha = p_\alpha p^\alpha + g^2 \Phi_\alpha \Phi^\alpha + f^2 \sum_\alpha \sum_{\gamma\delta, \gamma'\delta' \neq \alpha} \Phi_{\gamma\delta} \Phi_{\gamma'\delta'} \gamma^{\gamma\delta} \gamma^{\gamma'\delta'} + 2 g \Phi^\alpha p_\alpha + 2 f \Phi_{\gamma\delta} p_\alpha \gamma^{\gamma\delta\alpha} + 2 f g \Phi_{[\alpha} \Phi_{\gamma\delta]} \gamma^{\gamma\delta\alpha} + i\hbar g (\partial_\alpha \Phi^\alpha) + i\hbar f \partial_{[\alpha} \Phi_{\gamma\delta]} \gamma^{\gamma\delta\alpha}.$$

Si nous remarquons que

$$\sum_\alpha \sum_{\gamma\delta, \gamma'\delta' \neq \alpha} \Phi_{\gamma\delta} \Phi_{\gamma'\delta'} \gamma^{\gamma\delta} \gamma^{\gamma'\delta'} = \Phi_{\alpha\beta} \Phi_{\gamma\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} \gamma_\varepsilon - 3 \Phi_{\alpha\beta} \Phi^{\alpha\beta} \gamma_0,$$

l'équation (9) s'écrira

$$\Big\{ \Pi_\alpha \Pi^\alpha + (m_0 c + g_0 \mathcal{J})^2 + 2 f^2 \Phi_{\alpha\beta} \Phi^{\alpha\beta} + i\hbar g (\partial_\alpha \Phi_\beta - \partial_\beta \Phi_\alpha) \gamma^{(\alpha\beta)} + i\hbar f \partial_\alpha \Phi^{\alpha\beta} \gamma_\beta - g_0 (\partial_\alpha \mathcal{J}) \gamma^\alpha \Big\} \psi = 0. \qquad (11)$$

De même l'équation plus générale (7) nous donne, par itération,

$$\Big\{ p_\mu p^\mu + g_1^2 \Phi_\mu \Phi^\mu + f_1^2 \Phi_{\rho\sigma} \Phi_{\rho'\sigma'} \gamma^{\rho\sigma} \gamma^{\rho'\sigma'} - f_2^2 \Phi_{5\mu} \Phi^{5\mu} + g_2^2 \Phi_5^2 + 2 g_1 \Phi^\mu p_\mu + 2 f_1 \Phi_{[\rho\sigma} p_{\mu]} \gamma^{\mu\rho\sigma} + 2 f_2 \Phi_{5[\lambda} p_{\mu]} \gamma^{5\lambda\mu} + 2 g_1 f_1 \Phi_{[\rho\sigma} \Phi_{\mu]} \gamma^{\rho\sigma\mu} + 2 g_1 f_2 \Phi_{5[\lambda} p_{\mu]} \gamma^{5\lambda\mu} + 2 f_1 f_2 \Phi_{5\mu} \Phi_{\rho\sigma} \gamma^{5\mu} \gamma^{\rho\sigma} + 2 f_1 g_2 \Phi_{\rho\sigma} \Phi_5 \gamma^{5\rho\sigma} + (m_0 c + g_0 \mathcal{J})^2 + i\hbar [g_1 (\partial_\mu \Phi^\mu) + g_1 (\partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu) \gamma^{\mu\nu} + f_1 (\partial_{[\mu} \Phi_{\rho\sigma]}) \gamma^{\mu\rho\sigma} + f_1 (\partial_\mu \Phi^{\mu\nu}) \gamma_\nu + f_2 (\partial_\mu \Phi^{\mu 5}) \gamma_5 + f_2 (\partial_\mu \Phi_{5\lambda} - \partial_\lambda \Phi_{5\mu}) \gamma^{5\lambda\mu} + g_2 (\partial_\mu \Phi_5) \gamma^5 - g_0 (\partial_\mu \mathcal{J}) \gamma^\mu] \Big\} \psi = 0. \qquad (12)$$

Dans cette équation, nous remarquerons que

$$f_1^2 \Phi_{\rho\sigma} \Phi_{\rho'\sigma'} \gamma^{\rho\sigma} \gamma^{\rho'\sigma'} = f_1^2 (\Phi_{\mu\nu} \Phi_{\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5 - \Phi_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}).$$

Nous poserons encore

$$\Pi_\mu = p_\mu + g_1 \Phi_\mu + f_1 \Phi_{\rho\sigma} \gamma^{\rho\sigma\mu} + f_2 \Phi_{5\lambda} \gamma^{5\lambda\mu} \qquad (13)$$

et nous aurons

$$\Pi_\mu \Pi^\mu = p_\mu p^\mu + g_1^2 \Phi_\mu \Phi^\mu - 2 f_1^2 \Phi_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu} - 3 f_2^2 \Phi_{5\mu} \Phi^{5\mu} + 2 g_1 \Phi^\mu p_\mu + 2 f_1 \Phi_{[\rho\sigma} p_{\mu]} \gamma^{\rho\sigma\mu} + 2 f_2 \Phi_{5[\lambda} p_{\mu]} \gamma^{5\lambda\mu} + 2 g_1 f_1 \Phi_{[\rho\sigma} \Phi_{\mu]} \gamma^{\rho\sigma\mu} + 2 g_1 f_2 \Phi_{5[\lambda} \Phi_{\mu]} \gamma^{5\lambda\mu} + 2 f_1 f_2 \Phi_{\rho\sigma} \Phi_{5\mu} \gamma^{5\rho\sigma\mu} + i\hbar [g_1 \partial_\mu \Phi^\mu + f_1 \partial_{[\mu} \Phi_{\rho\sigma]} \gamma^{\rho\sigma\mu} + f_2 (\partial_\mu \Phi_{5\lambda} - \partial_\lambda \Phi_{5\mu}) \gamma^{5\lambda\mu}].$$

L'équation (12) s'écrira alors sous la forme

$$\Big\{ \Pi_\mu \Pi^\mu + (m_0 c + g_0 \mathcal{J})^2 + f_1^2 (\Phi_{\mu\nu} \Phi_{\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5 + \Phi_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}) + 2 f_2^2 \Phi_{5\mu} \Phi^{5\mu} + g_2^2 \Phi_5^2 + 2 g_2 f_1 \Phi_{\rho\sigma} \Phi_5 \gamma^{5\rho\sigma} + i\hbar [g (\partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu) \gamma^{\mu\nu} + f_1 (\partial_\mu \Phi^{\mu\nu}) \gamma_\nu + f_2 (\partial_\mu \Phi^{\mu 5}) \gamma_5 + g_2 (\partial_\mu \Phi_5) \gamma^{5\mu} - g_0 (\partial_\mu \mathcal{J}) \gamma^\mu] \Big\} \psi = 0, \qquad (14)$$

ou encore

$$\Big\{ \Pi_\mu \Pi^\mu + (m_0 c + g_0 \mathcal{J})^2 + (g_2 \Phi_5 + f_1 \Phi_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu 5})^2 + 2 f_1^2 \Phi_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu} + 2 f_2^2 \Phi_{5\mu} \Phi^{5\mu} + i\hbar [g_1 (\partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu) \gamma^{\mu\nu} + f_1 \partial_\mu \Phi^{\mu\nu} \gamma_\nu + f_2 \partial_\mu \Phi^{\mu 5} \gamma_5 + g_2 (\partial_\mu \Phi_5) \gamma^{\mu 5} - g_0 (\partial_\mu \mathcal{J}) \gamma^\mu] \Big\} \psi = 0. \qquad (15)$$

Nous spécialiserons ces équations en précisant la nature du champ agissant sur le corpuscule et en tenant compte des relations liant les composantes de ces champs.

1° Dans le cas du champ électromagnétique $F_{\mu\nu} = \Phi_{\mu\nu}$ de potentiels Φ_μ liés par les équations

$$\Phi_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu, \qquad \partial_\mu \Phi^{\mu\nu} = 0,$$

nous aurons

$$g_0 = g_2 = f_2 = 0,$$

$$[p_\mu \gamma^\mu + g_1 \Phi_\mu \gamma^\mu + f_1 \Phi_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} + i m_0 c] \psi = 0.$$

Posant

$$\Pi_\mu = p_\mu + g \Phi_\mu + f_1 \Phi_{\rho\sigma} \gamma^{\rho\sigma\mu} \qquad \left(g = \frac{e}{c} \right),$$

l'équation (14) se réduira, après division par $2 m_0 c$, à

$$\Big\{ \frac{1}{2 m_0 c} [\Pi_\mu \Pi^\mu + m_0^2 c^2] + \frac{f_1^2}{2 m_0 c} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu *} \gamma^5 + F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + \frac{eh}{4\pi m_0 c} F_{\mu\nu} i \gamma^{\mu\nu} \Big\} \psi = 0. \qquad (16)$$

On voit sur cette équation que la considération dans l'équation d'ondes (2) ou (7) d'une interaction s'exerçant par l'intermédiaire du champ électromagnétique et d'un moment magnétique propre, d'une part, modifie l'impulsion généralisée Π_μ et, d'autre part, ajoute le terme d'énergie potentielle

$$\frac{f_1^2}{2 m_0 c} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu *} \gamma^5 + F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}],$$

les constantes d'interaction f et g intervenant séparément, les interactions en f et g peuvent être considérées indépendamment.

2° Dans un champ mésique scalaire caractérisé par l'invariant $\mathcal{J}$ et le vecteur Φ_μ liés par les relations

$$\partial_\mu \mathcal{J} = \Phi_\mu, \qquad \partial_\mu \Phi^\mu = k_0^2 \mathcal{J}, \qquad \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu = 0,$$

l'équation d'onde s'écrit

$$\{ p_\mu \gamma^\mu + g_1 \Phi_\mu \gamma^\mu + i [m_0 c + g_0 \mathcal{J}] \} \psi = 0.$$

Posant

$$\Pi_\mu = p_\mu + g_1 \Phi_\mu,$$

l'équation du second ordre se réduit à

$$\Big\{ \frac{1}{2 m_0 c} \Big[\Pi_\mu \Pi^\mu + (m_0 c + g_0 \mathcal{J})^2 \Big] - \frac{h g_0}{4\pi m_0 c} \Phi_\mu \gamma^\mu \Big\} \psi = 0.$$

3° Dans un champ mésique pseudo-scalaire caractérisé par les champs Φ_5, $\Phi_{5\mu}$ liés par les équations

$$\partial_\mu \Phi_5 = \Phi_{\mu 5}, \qquad \partial_\mu \Phi^{\mu 5} = k_0^2 \Phi^5, \qquad \partial_\mu \Phi_{5\nu} - \partial_\nu \Phi_{5\mu} = 0,$$

l'équation d'ondes s'écrit

$$\{ p_\mu \gamma^\mu + f_2 \Phi_{5\mu} \gamma^{5\mu} + g_2 \Phi_5 \gamma^5 + i m_0 c \} \psi = 0.$$

Nous avons alors

$$\Pi_\mu = p_\mu + f_2 \Phi_{5\nu} \gamma^{5\nu\mu}.$$

et l'équation du second ordre s'écrit

$$\left\{\frac{1}{2m_0c}[\Pi_\mu\Pi^\mu + m_0^2c^2 + 2f_2^2\Phi_{5\mu}\Phi^{5\mu} + g_2^2\Phi_5^2] + \frac{h}{4\pi m_0 c}[g_2\Phi_{\mu 5}i\gamma^{5\mu} + f_2k_0^2\Phi_5 i\gamma^5]\right\}\psi = 0. \quad (17)$$

4° Dans un champ mésique vectoriel caractérisé par les grandeurs Φ_μ, $\Phi^{\mu\nu}$ liés par les équations

$$\partial_\mu\Phi_\nu - \partial_\nu\Phi_\mu = \Phi_{\mu\nu}, \qquad \partial_\mu\Phi^{\mu\nu} = k_0^2\Phi^\nu,$$

l'équation d'ondes s'écrit

$$\{p_\mu\gamma^\mu + g_1\Phi_\mu\gamma^\mu + f_1\Phi_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} + im_0c\}\psi = 0.$$

Posant

$$\Pi_\mu = p_\mu + g_1\Phi_\mu + f_1\Phi_{\rho\sigma}\gamma^{\rho\sigma\mu},$$

l'équation du second ordre s'écrira

$$\left\{\frac{1}{2m_0c}[\Pi_\mu\Pi^\mu + m_0^2c^2 + f_1^2(\Phi_{\mu\nu}\Phi_{\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5 + \Phi_{\mu\nu}\Phi^{\mu\nu})] + \frac{h}{4\pi m_0c}[g_1\Phi_{\mu\nu}i\gamma^{\mu\nu} + f_1k_0^2\Phi_\mu i\gamma^\mu]\right\}\psi = 0. \quad (18)$$

Remarquons que nous aurions la même équation dans la théorie du photon de M. L. de Broglie en substituant à la masse M_0 du méson intervenant dans $k_0 = \frac{2\pi}{h}M_0c$, la masse μ_0 infiniment petite du photon et en tenant compte d'une interaction électro-magnétique en f_1.

5° Dans un champ mésique pseudo-vectoriel représenté par les potentiels $\Phi_{5\mu}$ et les champs $\Phi_{\mu\nu5}$ liés par les équations

$$\partial_\mu\Phi_{5\nu} - \partial_\nu\Phi_{5\mu} = \Phi_{5\mu\nu}, \qquad \partial_\nu\Phi^{5\mu\nu} = k_0^2\Phi^{5\mu},$$
$$\partial_\mu\Phi^{5\mu} = 0, \qquad \partial_\mu\Phi^{\mu\nu} = 0,$$

l'équation d'ondes s'écrit

$$\{p_\mu\gamma^\mu + f_2\Phi_{5\mu}\gamma^{5\mu} + f_1\Phi_{5\mu\nu}\gamma^{5\mu\nu} + im_0c\}\psi.$$

Posant

$$\Pi_\mu = p_\mu + f_1\Phi_{\rho\sigma}\gamma^{\rho\sigma\mu} + f_2\Phi_{5\nu}\gamma^{5\nu\mu},$$

l'équation du second ordre s'écrit

$$\frac{1}{2m_0c}\{\Pi_\mu\Pi^\mu + m_0^2c^2 + f_1^2[\Phi_{\mu\nu}\Phi_{\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5 + \Phi_{\mu\nu}\Phi^{\mu\nu}] + 2f_2^2\Phi_{5\mu}\Phi^{5\mu}\}\psi = 0. \quad (19)$$

La seule grandeur caractéristique de l'électron de Dirac intervenant dans cette équation est la matrice γ_5.

6° Dans un champ mésique de Møller-Rosenfeld vectoriel + pseudo-scalaire défini par Φ_μ, $\Phi_{\mu\nu}$, Φ_5, $\Phi_{5\mu}$ avec $g_1 = g_2 = g$, $f_1 = f_2 = f$, l'équation d'ondes s'écrira

$$\{p_\mu\gamma^\mu + g[\Phi_\mu\gamma^\mu + \Phi_5\gamma^5] + f[\Phi_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} + \Phi_{5\mu}\gamma^{5\mu}] + im_0c\}\psi = 0.$$

Posant

$$\Pi_\mu = p_\mu + g\Phi_\mu + f[\Phi_{\rho\sigma}\gamma^{\rho\sigma\mu} + \Phi_{5\nu}\gamma^{5\nu\mu}],$$

l'équation du second ordre devient

$$\left\{\frac{1}{2m_0c}[\Pi_\mu\Pi^\mu + m_0^2c^2 + (g\Phi_5 + f\Phi_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu5})^2 + 2f^2(\Phi_{\mu\nu}\Phi^{\mu\nu} + \Phi_{5\mu}\Phi^{5\mu})] + \frac{h}{4\pi m_0c}[g(\Phi_{\mu\nu}i\gamma^{\mu\nu} + \Phi_{\mu5}i\gamma^{\mu5})] + \frac{fk_0^2h}{4\pi m_0c}[\Phi_\mu\gamma^\mu + \Phi_5\gamma^5]\right\}\psi = 0. \quad (20)$$

On voit que, dans ce cas, l'équation du second ordre contiendra des termes dépendant du produit fg.

Nous allons maintenant préciser certains aspects des résultats ci-dessus en revenant des variables d'univers x^1, x^2, x^3, $x^4 = ict$, aux variables d'espace-temps x^1, x^2, x^3, $x^0 = ct$ et des matrices γ aux matrices α en posant

$$\gamma_0 = \alpha_0 = 1, \qquad \gamma_p = i\alpha_4\alpha_p, \qquad \gamma_4 = \alpha_4, \qquad \gamma_5 = i\alpha_4\alpha_5.$$

Nous écrirons

$$i\alpha_4\alpha_p = \pi_p, \quad i\alpha_p\alpha_q\alpha_4 = \mu_r, \quad i\alpha_p\alpha_q\alpha_r = \sigma_0, \quad i\alpha_p\alpha_q = \sigma_r.$$

Nous poserons également

$$\Phi_4 = i\Phi_0 = i\mathcal{A}_0, \qquad \Phi_p = \Phi_p = \mathcal{A}_p,$$
$$\Phi_{54} = i\Phi_{50} = iU_0, \qquad \Phi_{5p} = U_p.$$
$$\Phi_{p4} = i\Phi_{p0} = -i\mathcal{E}_p, \qquad \Phi_{pq} = \mathcal{H}_r,$$

L'équation (7) s'écrit alors

$$\left\{ip_0\alpha_4 + \sum_p i\alpha_4\alpha_p p_p + im_0c + g_0 i\mathcal{J} + g_1\left[i\Phi_0\alpha_4 + \sum_p \Phi_p i\alpha_4\alpha_p\right] + f_1\left[\sum_{(pq)}\Phi_{pq}\alpha_{pq} - \sum_p \Phi_{p0}\alpha_p\right] + f_2\left[\sum_p \Phi_{5p}\alpha_{5p} - \Phi_{p0}\alpha_5\right] - g_2\Phi_5 i\alpha_{pqr}\right\}\psi = 0.$$

Multipliant cette équation par $-i\alpha_4$, elle s'écrit

$$\left\{p_0 + \sum_p p_p\alpha_p + (m_0c + g_0\mathcal{J})\alpha_4 + g_1\left[\sum_p \mathcal{A}_p\alpha_p + \mathcal{A}_0\alpha_0\right] - f_1\left[\sum_p(\mathcal{H}_p i\alpha_{pq4} - \mathcal{E}_p i\alpha_{p4})\right] - f_2[U_0 i\alpha_5\alpha_4 + U_p i\alpha_{5p4}] + g_2\Phi_5\alpha_5\right\}\psi = 0 \quad (21)$$

et généralise l'équation de l'électron de charge $(-e)$ placé dans le champ électromagnétique de potentiel $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_p$

$$\left\{\left[\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\partial_t + \frac{e}{c}\mathcal{A}_0\right] + \sum_p\left[-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^p} + \frac{e}{c}\mathcal{A}_p\right]\alpha_p + m_0c\alpha_4\right\}\psi = 0.$$

Si nous revenons des moments généralisés

$$\Pi_\mu = p_\mu + g_1\Phi_\mu + f_1\Phi_{\rho\sigma}\gamma^{\rho\sigma\mu} + f_2\Phi_{5\nu}\gamma^{5\nu\mu},$$

aux moments exprimés en variables d'espace-temps, nous obtenons

$$\Pi_4 = i\left[p_0 + g_1\Phi_0 - f_1\sum_{(pq)}\Phi_{pq}i\alpha_{pq4} + f_2\sum_{(p)}\Phi_{5p}i\alpha_{qr}\right],$$

que nous écrirons encore

$$\begin{aligned}\Pi_4 &= i[(p_0 + g_1\mathcal{A}_0)\alpha_4 - f_1(\mathcal{H}.\sigma) + f_2(\mathbf{U}.\boldsymbol{\mu})]\alpha_4\\ &= iP_0\alpha_4 = i\alpha_4 P_0,\\ \Pi_p &= p_p + g_1\Phi_p - f_1[\Phi_{0q}i\alpha_{pq4} - \Phi_{0r}i\alpha_{rp4} + \Phi_{qr}i\alpha_5]\\ &\quad + f_2[\Phi_{50}i\alpha_{qr} - \Phi_{5q}i\alpha_r + \Phi_{5r}i\alpha_q]\end{aligned}$$

que nous écrivons

$$\begin{aligned}\Pi_p &= \alpha_4[(p_p + g_1\mathcal{A}_p)\alpha_4 - f_1(\mathcal{E}_q\sigma_r - \mathcal{E}_r\sigma_q - \mathcal{H}_p\sigma_0)\\ &\quad + f_2(U_0\mu_p + U_q\pi_r - U_r\pi_q)]\\ &= [(p_p + g_1\mathcal{A}_p)\alpha_4 - f_1(\mathcal{E}_q\sigma_r - \mathcal{E}_r\sigma_q + \mathcal{H}_p\sigma_0)\\ &\quad + f_2(U_0\mu_p - U_q\pi_r + U_r\pi_q)]\alpha_4.\end{aligned}$$

Nous sommes donc conduits à poser

$$\left.\begin{aligned}P_0 &= (p_0 + g_1\mathcal{A}_0)\alpha_4 - f_1(\mathcal{H}.\sigma) + f_2(\mathbf{U}.\boldsymbol{\mu})\\ &= P_0^+,\\ \mathbf{P} &= (\mathbf{p} + g_1\boldsymbol{\mathcal{A}})\alpha_4 - f_1[(\mathcal{E}\wedge\sigma) - \mathcal{H}\sigma_0]\\ &\quad + f_2[(\mathbf{U}\wedge\boldsymbol{\pi}) + U_0\boldsymbol{\mu}],\\ \mathbf{P}^+ &= (\mathbf{p} + g_1\boldsymbol{\mathcal{A}})\alpha_4 - f_1[(\mathcal{E}\wedge\sigma) + \mathcal{H}\sigma_0]\\ &\quad + f_2[(U_0 - (\mathbf{U}\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\pi})],\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

avec

$$\Pi_4 = i\alpha_4 P_0 = iP_0^+\alpha_4, \qquad P_0^+ = P_0,$$
$$\Pi_p = \alpha_4 P_p = P_p^+\alpha_4.$$

Remarquons que

$$\alpha_4 P_p^+\alpha_4 = P_p.$$

nous avons alors

$$\Pi_\mu\Pi^\mu = -P_0^+P_0 + \sum_p P_p^+P_p.$$

Le moment généralisé P_0, P_p se présente ici comme une densité vectorielle, opérateur correspondant à l'impulsion classique, tandis que le moment

$$[\mathbf{p} + g\boldsymbol{\mathcal{A}}]$$

correspond à la composante xo d'un tenseur symétrique du second ordre.

Transformons de même l'équation du second ordre générale (14), nous obtiendrons, après multiplication par $\frac{\alpha_4}{2m_0c}$, l'équation générale

$$\begin{aligned}\Bigg\{&\frac{\alpha_4}{2m_0c}\left[\sum_p P_p^+P_p - P_0^+P_0 + (m_0c + g_0\mathcal{J})^2\right]\\ &+\frac{f_1^2}{2m_0c}[2\mathcal{H}.\mathcal{E}\alpha_5 + (\mathcal{H}^2 - \mathcal{E}^2)\alpha_4]\\ &+\frac{2f_2^2}{2m_0c}[\mathbf{U}^2 - U_0^2]\alpha_4\\ &+\frac{g_2^2}{2m_0c}\Phi_5^2\alpha_4 + \frac{2g_2f_1}{2m_0c}[\Phi_5(\mathcal{E}.\boldsymbol{\mu} - \mathcal{H}.\boldsymbol{\pi})]\\ &+\frac{h}{4\pi m_0c}\Bigg[g_1\Bigg[\sum(\partial_p\mathcal{A}_q - \partial_q\mathcal{A}_p)\mu_r\\ &\qquad - \sum_p(\partial_0\mathcal{A}_p + \partial_p\mathcal{A}_0)\pi_p\Bigg]\\ &+ f_1\Bigg[\operatorname{div}\mathcal{E}.\alpha_0\\ &\qquad + \sum_p(-\partial_0\mathcal{E}_p + \partial_q\mathcal{H}_r - \partial_r\mathcal{H}_q)\alpha_p\Bigg]\\ &+ f_2[\operatorname{div}U + \partial_0 U_0]\alpha_5\\ &+ g_2\left[\partial_0\Phi_5\sigma_0 - \sum_p\partial_p\Phi_5\sigma_p\right]\\ &+ g_0\left[\partial_0\mathcal{J} - \sum_p(\partial_p\mathcal{J})\alpha_p\right]\Bigg]\Bigg\}\psi = 0. \qquad (23)\end{aligned}$$

Dans les cas particuliers remarquables que nous avons rencontrés, cette équation se simplifie notablement.

1° Dans le cas où g_1 et f_1 sont seuls différents de zéro et où le champ est électromagnétique,

$$\mathcal{E}_p = -\partial_0\Phi_p - \partial_p\Phi_0, \qquad \mathcal{H}_p = \partial_q\mathcal{A}_r - \partial_r\mathcal{A}_q.$$

Les moments P_0, $\mathbf{P}$ se réduisent à

$$\begin{aligned}P_0 &= (p_0 + g_1\mathcal{A}_0)\alpha_4 - f_1(\mathcal{H}.\sigma),\\ \mathbf{P} &= (\mathbf{p} + g_1\boldsymbol{\mathcal{A}})\alpha_4 - f_1[(\mathcal{E}\wedge\sigma) - \mathcal{H}\sigma_0]\end{aligned}$$

et l'équation (23) s'écrit

$$\begin{aligned}\Bigg\{&\frac{\alpha_4}{2m_0c}\left[\sum_p(P_p^+P_p) - P_0^+P_0 + m_0^2c^2\right]\\ &+\frac{f_1^2}{2m_0c}[2(\mathcal{H}.\mathcal{E})\alpha_5 + (\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2)\alpha_4]\\ &+\frac{hg_1}{4\pi m_0c}[(\mathcal{E}.\boldsymbol{\pi}) + (\mathcal{H}.\boldsymbol{\mu})]\Bigg\}\psi = 0. \qquad (24)\end{aligned}$$

Dans le cas mésique vectoriel, P_0, $\mathbf{P}$ sont de la même forme, mais l'équation du second ordre doit être complété par les termes résultant de la masse finie du méson introduits par les équations

$$\partial_0\mathcal{E}_p - \partial_q\mathcal{H}_r + \partial_r\mathcal{H}_q = k_0^2\mathcal{A}_p,$$
$$\operatorname{div}\mathcal{E}_p = -k_0^2\mathcal{A}_0.$$

Nous obtenons alors l'équation du second ordre

$$\begin{aligned}\Bigg\{&\frac{\alpha_4}{2m_0c}\left[\sum_p P_p^+P_p - P_0^+P_0 + m_0^2c^2\right]\\ &+\frac{f_1^2}{2m_0c}[2(\mathcal{H}.\mathcal{E})\alpha_5 + (\mathcal{H}^2 - \mathcal{E}^2)\alpha_4]\\ &+\frac{hg_1}{4\pi m_0c}[(\mathcal{E}.\boldsymbol{\pi}) + (\mathcal{H}.\boldsymbol{\mu})]\\ &-\frac{hf_1}{4\pi m_0c}k_0^2[\mathcal{A}_0\alpha_0 + (\boldsymbol{\mathcal{A}}.\boldsymbol{\alpha})]\Bigg\}\psi = 0. \qquad (25)\end{aligned}$$

Au terme d'énergie potentielle non classique dépendant du moment magnétique propre s'ajoute un terme d'énergie potentielle dépendant du quadrivecteur densité-courant du corpuscule.

Dans le cas du champ mésique scalaire, les équations

$$\mathcal{A}_0 = -\partial_0 \mathcal{J}, \qquad \mathcal{A}_p = \partial_p \mathcal{J}, \qquad \operatorname{div} \mathcal{A}_p - \partial_0 \mathcal{A}_0 = k_0^2 \mathcal{J}$$

nous donnent immédiatement

$$P_0 = (p_0 + g_1 \mathcal{A}_0)\alpha_4, \qquad P_p = (p_p + g_1 \Phi_p)\alpha_4,$$

et l'équation du second ordre

$$\left\{ \frac{\alpha_4}{2 m_0 c} \left[\left(\sum_p P_p^2 \right) - P_0^2 + (m_0 c + g_0 \mathcal{J})^2 \right] - \frac{h}{4\pi m_0 c} [\mathcal{A}_0 \alpha_0 + (\mathcal{A} . \alpha)] \right\} \psi = 0. \qquad (26)$$

Dans le cas du champ mésique pseudo-scalaire, les équations

$$\partial_p \Phi_5 = -U_p, \qquad \partial_0 \Phi_5 = +U_0,$$
$$\operatorname{div} \mathbf{U} + \partial_0 U_0 = -k_0^2 \Phi_5$$

nous donnent, avec

$$P_0 = p_0 \alpha_4 - f_2(\mathbf{U} . \boldsymbol{\mu}),$$
$$\mathbf{P} = \mathbf{p}\alpha_4 + f_2[U_0 \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{U} \wedge \boldsymbol{\pi})],$$

l'équation du second ordre

$$\left\{ \frac{\alpha_4}{2 m_0 c} \left[\sum_p P_p^+ P_p - P_0^+ P_0 + m_0^2 c^2 \right] + \frac{g^2}{2 m_0 c} \Phi_5^2 + \frac{2 f_2^2}{2 m_0 c} [|\mathbf{U}|^2 - U_0^2] + \frac{h}{4\pi m_0 c} g_2 [U_0 \sigma_0 + (\mathbf{U} . \sigma)] - \frac{h}{4\pi m_0 c} f_2 k_0^2 \Phi_5 \alpha_5 \right\} \psi = 0. \qquad (27)$$

Dans le cas d'un mélange de champs vectoriels et pseudo-scalaires, l'équation (23) s'écrit

$$\left\{ \frac{\alpha_4}{2 m_0 c} \left[\sum_p P_p^+ P_p - P_0^+ P_0 + m_0^2 c^2 \right] + \frac{f_1^2}{2 m_0 c} [2(\mathcal{H} . \mathcal{E})\alpha_5 + (\mathcal{H}^2 - \mathcal{E}^2)\alpha_4] + \frac{g_2^2}{2 m_0 c} \Phi_5^2 \alpha_4 + \frac{2 f_2^2}{2 m_0 c} [|\mathbf{U}|^2 - U_0^2]\alpha_4 + \frac{2 g_2 f_1}{2 m_0 c} [\Phi_5(\mathcal{E} . \boldsymbol{\mu} - \mathcal{H} . \boldsymbol{\pi})] + \frac{h g_1}{4\pi m_0 c} [\mathcal{E} . \boldsymbol{\pi} + \mathcal{H} . \boldsymbol{\mu}] + \frac{h}{4\pi m_0 c} g^2 [U_0 \sigma_0 + (\mathbf{U} . \sigma)] - \frac{h f_1}{4\pi m_0 c} k_0^2 [\mathcal{A}_0 \alpha_0 + (\mathcal{A} . \alpha)] - \frac{h f_2}{4\pi m_0 c} k_0^2 \Phi_5 \alpha_5 \right\} \psi = 0. \qquad (28)$$

Les termes d'énergie potentielle n'apparaissent pas comme correspondant seulement à la superposition des termes des cas vectoriel et pseudo-scalaire, mais comportent, en outre, un terme en $g_2 f_1$ dépendant du moment magnétique propre.

Dans le cas du champ mésique pseudo-vectoriel, où l'on a, entre les potentiels et les champs,

$$\partial_p U_q - \partial_q U_p = \mathcal{E}_r, \qquad \partial_0 U_p + \partial_p U_0 = -\mathcal{H}_p,$$
$$\partial_0 \mathcal{H}_p - \partial_q \mathcal{E}_r + \partial_r \mathcal{E}_q = k_0^2 U_p,$$
$$\partial_0 U_0 + \operatorname{div} \mathbf{U} = 0,$$
$$\partial_0 \mathcal{E}_p - \partial_q \mathcal{H}_r + \partial_r \mathcal{H}_q = 0, \qquad \operatorname{div} \mathcal{E} = 0,$$

les moments s'écrivent

$$P_0 = p_0 \alpha_4 + f_2(\mathbf{U} . \boldsymbol{\mu}) - f_1(\mathcal{H} . \sigma),$$
$$\mathbf{P} = \mathbf{p}\alpha_4 + f_2[U_0 \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{U} \wedge \boldsymbol{\pi})] - f_1[(\mathcal{E} \wedge \sigma) - \mathcal{H}\sigma_0]$$

et l'équation du second ordre se réduit à

$$\left\{ \frac{\alpha_4}{2 m_0 c} \left[\sum_p P_p^+ P_p - P_0^+ P_0 + m_0^2 c^2 \right] + \frac{f_1^2}{2 m_0 c} [2(\mathcal{H} . \mathcal{E})\alpha_5 + (\mathcal{H}^2 - \mathcal{E}^2)\alpha_4 + \frac{2 f_2^2}{2 m_0 c} [|\mathbf{U}|^2 - U_0^2]\alpha_4 \right\} \psi = 0. \qquad (29)$$

Un champ pseudo-vectoriel n'introduit pas de terme d'énergie potentielle lié au moment magnétique du corpuscule.

Dans le cas où le champ est la superposition d'un champ mésique scalaire et d'un champ mésique pseudo-scalaire, les termes $g_1 \mathcal{A}_0$, $g_1 \mathcal{A}_p$ s'ajoutent, dans P_0, P_p et dans l'équation d'ondes précédente, $(m_0^2 c^2)$ est remplacé par $(m_0 c + g_0 \mathcal{J})^2$ et le terme

$$-\frac{h}{4\pi m_0 c} [\mathcal{A}_0 \alpha_0 + (\mathcal{A} . \alpha)]$$

s'ajoute sans mélange des interactions.

Je remercie M. le Professeur Louis de Broglie pour la bienveillante attention qu'il a apportée à ce travail.

Manuscrit reçu le 20 juin 1947.

SUR LES QUADRIPÔLES
AYANT LEURS IMPÉDANCES ITÉRATIVES PROPORTIONNELLES A CELLES D'UN QUADRIPÔLE DONNÉ

Par Maurice PARODI.

Sommaire. — Après avoir rappelé comment se pose le problème de la détermination des quadripôles ayant les mêmes impédances itératives qu'un quadripôle donné, l'auteur indique une méthode qui permet de construire des ensembles de quadripôles ayant leurs impédances itératives proportionnelles à celles d'un quadripôle donné.

1. **Généralités**. — Considérons un quadripôle; en représentant, en notations complexes, par V_1, I_1 et V_2, I_2 les tensions et les intensités de courant à l'entrée et à la sortie, on sait qu'il existe entre ces grandeurs la relation

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

les coefficients de la matrice (α, β, γ, δ), dite *caractéristique* du quadripôle, étant des fonctions complexes de la pulsation des ondes harmoniques que l'on considère.

On sait, d'autre part, que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Supposons le quadripôle fermé sur une impédance Z; on a

$$V_2 = ZI_2. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) donnent

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{\alpha V_2 + \beta I_2}{\gamma V_2 + \delta I_2} = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}.$$

Cherchons à déterminer Z pour que l'impédance d'entrée $\frac{V_1}{I_1}$ soit égale à l'impédance de sortie; il faut que Z ait une valeur particulière ρ définie par la relation

$$\rho = \frac{\alpha\rho + \beta}{\gamma\rho + \delta}.$$

Il apparaît que ρ est racine de l'équation

$$\gamma\rho^2 - (\alpha - \delta)\rho - \beta = 0. \tag{3}$$

Pour un quadripôle donné, il existe donc deux valeurs de l'impédance Z sur laquelle il peut être fermé, telle que l'impédance d'entrée, soit aussi égale à Z.

L'impédance ainsi définie par la relation (3) est dite *impédance caractéristique ou itérative du quadripôle* et l'on sait le rôle important que jouent de telles impédances dans la théorie des filtres électriques.

Si nous reprenons les équations (1), une transformation simple permet de les écrire

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\gamma} & -\frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\gamma} & -\frac{\delta}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\gamma} & -\frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\gamma} & -\frac{\delta}{\gamma} \end{pmatrix}$$

est la matrice des *impédances* du quadripôle.

Cherchons les valeurs propres de cette matrice; ce sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{\gamma} - \lambda & -\frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\gamma} & -\frac{\delta}{\gamma} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

qui s'écrit

$$\gamma\lambda^2 - (\alpha - \delta)\lambda - \beta = 0. \tag{5}$$

L'équation (5) est identique à (3) et il apparaît que *les impédances itératives d'un quadripôle sont les valeurs propres de la matrice des impédances.*

Supposons que l'on veuille déterminer l'ensemble des quadripôles ayant les mêmes impédances itératives qu'un quadripôle donné.

Effectuons sur les tensions et les courants qui figurent dans l'équation (4) la même transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{pmatrix},$$

S étant une matrice carrée, du second ordre, non singulière quelconque, on aura

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\gamma} & -\frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\gamma} & -\frac{\delta}{\gamma} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{pmatrix}$$

et la matrice

$$S^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\gamma} & -\frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\gamma} & -\frac{\delta}{\gamma} \end{pmatrix} S$$

peut être considérée comme la matrice impédance d'un nouveau quadripôle dans la mesure où la matrice caractéristique correspondante a un déterminant égal à l'unité. Comme on sait que l'équation aux valeurs propres demeure invariante dans la transformation caractérisée par S, on voit que ce nouveau quadripôle aura les mêmes impédances itératives que le quadripôle donné.

Usunoff [1], dans le cas d'un quadripôle en T, a montré comment on pouvait parvenir ainsi à la notion de filtre dérivé en m de Zobel.

2. **Quadripôles ayant leurs impédances itératives proportionnelles à celles d'un quadripôle donné.** — Définissons le quadripôle donné par la relation (1) :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

et faisons sur les V_1, I_1 et V_2, I_2 qui y figurent, une même transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} V'_1 \\ I'_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} V'_2 \\ I'_2 \end{pmatrix},$$

T étant la matrice supposée régulière,

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Il vient immédiatement

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ I'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V'_2 \\ I'_2 \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} T.$$

Cette dernière matrice, de déterminant évidemment égal à l'unité, peut être considérée comme la matrice caractéristique d'un quadripôle; ses coefficients s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{ad-bc}(ad\alpha - ab\gamma + cd\beta - cb\delta), \\ \beta' &= \frac{1}{ad-bc}(bd\alpha - b^2\gamma + d^2\beta - bd\delta), \\ \gamma' &= \frac{1}{ad-bc}(-ac\alpha + a^2\gamma - c^2\beta + ac\delta), \\ \delta' &= \frac{1}{ad-bc}(-bc\alpha + ab\gamma - cd\beta + ad\delta). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Un quadripôle ayant ses impédances itératives proportionnelles à celles d'un quadripôle donné devra donc être tel que l'on ait

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\alpha' - \delta'}{\alpha - \delta} = \frac{\beta'}{\beta}.$$

L'examen des relations (6) montre que, dans le cas général, la détermination des coefficients de la matrice T, pour qu'il en soit ainsi, est malaisée.

Nous nous proposons de montrer que l'on peut cependant déterminer simplement des ensembles de matrices T tels que le quadripôle (α', β', γ', δ') ait ses impédances itératives proportionnelles à celles du quadripôle initial (α, β, γ, δ).

A cet effet, on peut remarquer que l'équation aux impédances caractéristiques du quadripôle (α, β, γ, δ) s'écrit

$$\gamma\rho^2 - (\alpha - \delta)\rho - \beta = 0 \qquad (7)$$

et que son équation aux valeurs propres, qui demeure invariante dans la transformation T, est

$$\lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + 1 = 0. \qquad (8)$$

Les équations (7) et (8) donnent

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2\gamma}\left[\alpha - \delta \pm \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma}\right], \\ \lambda &= \frac{1}{2}\left[\alpha + \delta \pm \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Or, de $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, on tire

$$(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = (\alpha + \delta)^2 - 4$$

et, entre les ρ et les λ, on en déduit la relation

$$\rho = \frac{\lambda - \delta}{\gamma}. \qquad (10)$$

Considérons maintenant le quadripôle (α', β', γ', δ'); entre ses impédances itératives et ses valeurs propres, ces dernières étant les mêmes que celles du quadripôle (α, β, γ, δ), on aura la relation

$$\rho' = \frac{\lambda - \delta'}{\gamma'}.$$

Comme nous voulons que $\rho' = \mu\rho$, μ étant une grandeur réelle ou complexe, nous en déduisons

$$\gamma = \mu\gamma', \qquad \delta = \delta'. \qquad (11)$$

Compte tenu de ces relations, les deux dernières équations (6) donnent

$$b = \frac{c\beta}{\gamma}\mu, \qquad d = \frac{a\gamma + c(\delta - \alpha)}{\gamma}\mu, \qquad (12)$$

ce qui permet de déterminer b et d à partir de valeurs arbitraires données à a et c, pourvu que la matrice T soit régulière.

Nous savons donc déterminer les éléments de T et la matrice (α', β', γ', δ') caractéristique des quadripôles ayant leurs impédances itératives proportionnelles à celles d'un quadripôle donné (α, β, γ, δ).

[1] *Archiv für Elektrotechnik*, 1942, **36**, p. 687.

Remarque I. — Des expressions générales (9) de ρ et λ on aurait pu tirer également la relation

$$\rho = \frac{\alpha - \lambda}{\gamma},$$

ce qui nous aurait conduit à un second type de quadripôles ayant leurs impédances itératives proportionnelles à celles du quadripôle donné.

Remarque II. — Il est à noter que cette méthode ne permet pas de déterminer les quadripôles ayant leurs impédances itératives *égales* à celles d'un quadripôle donné; en faisant $\mu = 1$ dans les relations (12), on trouve

$$\gamma = \gamma', \qquad \delta = \delta'$$

et les deux premières relations (6) donnent

$$\alpha' = \alpha, \qquad \beta' = \beta.$$

Manuscrit reçu le 26 mai 1947.

UN NOUVEL ÉMETTEUR D'ONDES ULTRA-COURTES AMORTIES

Par M. Jean LE BOT.
Laboratoire de Physique. Faculté des Sciences de Rennes.

Sommaire. — Description détaillée d'un oscillateur du type « doublet de Hertz » de construction simple, destiné à la production d'ondes amorties de 6000 Mc environ ($\lambda = 5$ cm). *Cet émetteur est associé à des guides et cornets* analogues à ceux utilisés actuellement en ondes hyperfréquences entretenues, ce qui n'avait guère été employé jusqu'ici pour les ondes amorties.

Cet émetteur, mis au point en vue d'études sur la structure moléculaire, peut servir pour des expériences de cours; quelques-unes de celles-ci, particulièrement typiques, sont décrites.

Divers expérimentateurs ont utilisé le doublet de Hertz comme source de rayonnement hertzien; c'est ainsi, notamment, que Nichols et Tear [1] ont pu réaliser la liaison entre le spectre infrarouge et le spectre hertzien.

Après avoir essayé le montage décrit par Nichols et Tear, j'ai été amené à modifier un autre montage indiqué pour la première fois par Betz [2], dans le but d'obtenir une plus grande stabilité de l'émission. J'ai été conduit également à associer à cet émetteur des guides et cornets (qui n'avaient pas été utilisés jusqu'ici en amorties).

I. — Dispositif de production et de réception des ondes amorties.

1. Principe de l'émetteur. — L'émetteur est un petit doublet de Hertz vibrant en demi-onde, formé de deux petits fils conducteurs séparés par une très fine coupure (*fig.* 1) et immergé dans du pétrole. L'excitation du doublet se fait à l'aide de deux fils résistants très fins attachés le plus près possible de la coupure et reliés, à travers une grande résistance, au secondaire d'un transformateur donnant 8 à 10 000 V.

Le mécanisme de l'émission est sensiblement le suivant : pendant une alternance du courant alternatif, la tension aux bornes du petit condensateur constitué par la coupure du doublet croît jusqu'à la tension de claquage du diélectrique. A ce moment, une étincelle éclate qui décompose



Fig. 1.

localement le pétrole en donnant du carbone; les deux moitiés de l'oscillateur sont alors pratiquement court-circuitées pour la haute fréquence. La partie ohmique de l'impédance du doublet étant très faible, celui-ci rayonne un train d'ondes amorties puis est relancé à l'alternance suivante.

2. Détails techniques de réalisation de l'émetteur. — *a.* Un réglage très critique pour le bon fonctionnement de l'émetteur est celui de la longueur de la coupure qui est de l'ordre de quelques 1/100 de millimètre. Il faut donc prévoir un réglage micrométrique très précis.

b. Le métal constituant le doublet est du tungstène

ou du platine en fils de 1 mm de diamètre; les deux donnent de bons résultats. Le platine s'use plus vite mais est beaucoup plus facile à travailler

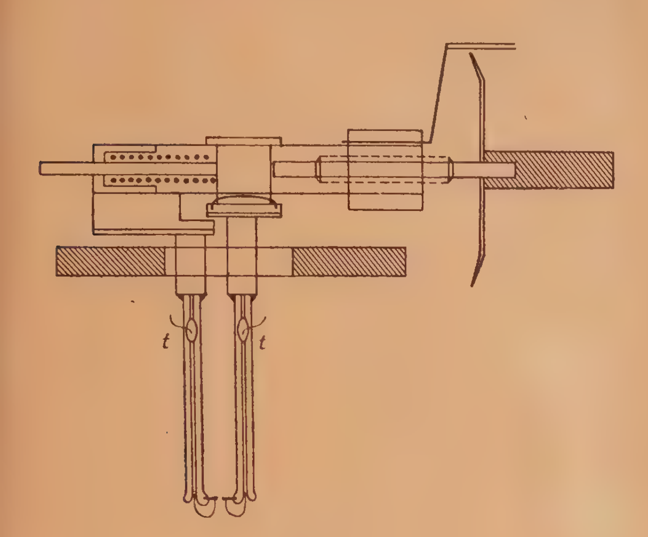


Fig. 2.

que le tungstène. Les deux moitiés du doublet ont une longueur de 4,5 mm, ce qui donne 9 mm pour la longueur totale, la longueur d'onde émise est de 4,4 cm. On voit que l'on est loin du

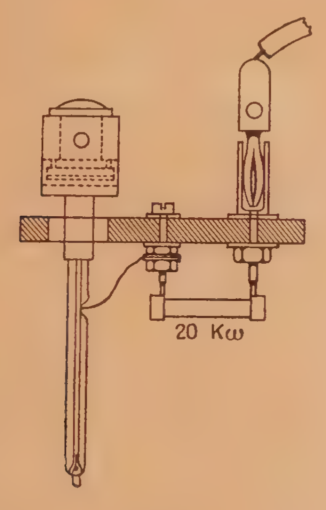


Fig. 3.

rapport théorique $\frac{\lambda}{l} = 2$. Ce fait a été signalé par différents auteurs : au fur et à mesure que λ décroît, le rapport $\frac{\lambda}{l}$ croît.

c. Les fils de charge ont une grande importance. Ils doivent présenter une impédance élevée pour la H. F. Le R. N. C. de 1/10 de millimètre a été utilisé avec succès ainsi qu'une sorte de nichrome de même diamètre. Pour bloquer totalement la haute fréquence, on soude aux fils de charge, le plus près possible du doublet, deux résistances au carbone de 20 000 Ω (0,5 W).

d. Après essai de plusieurs diélectriques autres que le pétrole (en particulier l'air et l'huile de disjoncteur), l'avantage reste de beaucoup au premier. Au bout de quelque temps de fonctionnement le pétrole noircit par suite de la production de carbone; son efficacité diminue et l'on voit la tension aux bornes de l'émetteur baisser; c'est pourquoi il est bon de réaliser un lent courant de pétrole en intercalant un filtre sur le parcours. L'expérience montre qu'il n'est pas utile de diriger un jet de pétrole sur l'oscillateur en fonctionnement, comme l'ont fait Nichols et Tear.

e. Le montage de l'émetteur est représenté en figures 2, 3 et 4. Les deux moitiés du doublet en platine de 1 mm sont soudés à deux tiges capillaires en verre de 70 à 80 mm de long. Les fils de charge, enroulés très serrés à l'extrémité des fils de platine, forment une boucle, passent dans les tubes capillaires et sortent par les trous *t*, *t* pour venir se relier aux résistances de 20 000 Ω montées en série sur l'alimentation. Le mouvement micrométrique est obtenu à l'aide d'une vis au pas de 0,5 mm poussant un curseur rappelé par un ressort.

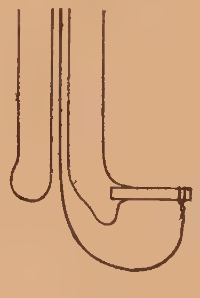


Fig. 4.

f. *Montage électrique*. — L'alimentation se fait à l'aide d'un transformateur 10 000 V, 25 mA dont on peut faire varier la tension en l'alimentant par un alternostat ou en intercalant une self à noyau réglable dans le primaire. Sur le secondaire on place une résistance à eau importante, constituée par un tube de verre de 1 m de long et 7 mm de diamètre intérieur. Le montage général est représenté figure 5.

L'intensité du courant ne doit pas dépasser 4 mA : au delà on noircit très rapidement le doublet et il faut le nettoyer souvent. La tension correcte aux bornes est environ 600 V avec le pétrole du commerce. L'émetteur consomme donc environ 1,2 W

de basse fréquence, la puissance émise est de l'ordre de 10 à 20 mW H. F. Les conditions indiquées

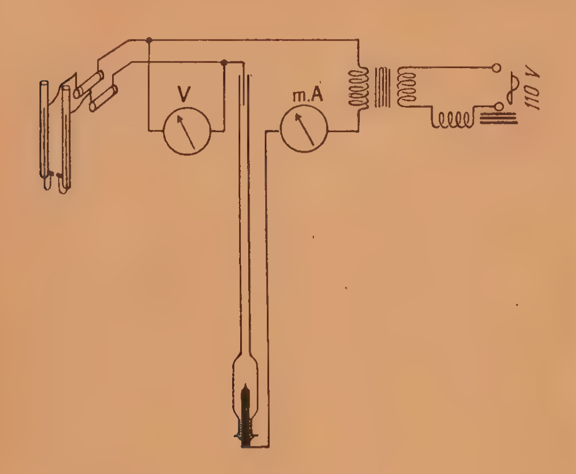


Fig. 5.

étant réalisées, l'émetteur fonctionne très bien, avec stabilité. On a pu l'utiliser plusieurs heures sans nettoyage ni réglage.

3. **Récepteur**. — Le récepteur adopté est un détecteur silicium-tunsgtène de fabrication anglaise, spécialement fabriqué pour les hyperfréquences; il est très stable et très sensible. On abrite le détecteur dans une petite boîte formant blindage et on le relie à un galvanomètre sensible par un fil blindé. Il est avantageux de prendre un galvanomètre à période assez grande (quelques secondes) pour éviter qu'il suive les très légères irrégularités de l'émission.

II. — Expériences de démonstration réalisées avec les ondes centimétriques.

L'appareillage décrit ci-dessus est destiné à des recherches sur la structure moléculaire. Mais en outre, avec cet émetteur et le détecteur au silicium-tungstène, on a pu réaliser à peu de frais et sans klystron, deux groupes d'expériences très typiques et faciles à mettre en œuvre, qu'il nous a semblé utile d'indiquer : les unes permettent de montrer les propriétés des ondes hertziennes et la propagation dans les guides et cornets, les autres sont de véritables expériences d'*optique* et montrent l'analogie entre la lumière et les ondes hertziennes.

1. **Quelques expériences sur les propriétés des ondes hertziennes**. — *a. L'oscillateur décrit et le détecteur silicium-tungstène,* placés à quelque distance, constituent un ensemble émetteur récepteur très simple à réaliser, permettant d'effectuer des démonstrations sur la transmission des ondes hertziennes.

b. Guidage des ondes électromagnétiques. — La technique moderne des ondes centimétriques est basée sur l'emploi des guides d'ondes et des cornets [3]. On peut mettre simplement en évidence avec l'émetteur décrit les propriétés des guides, cornets et antennes diélectriques. Ces expériences sont entièrement originales, car, à part Melloh [4] qui a indiqué très sommairement la possibilité du guidage des ondes amorties, aucun auteur, à notrec onnaissance, n'a rien publié sur la question. Nous avons constaté qu'*il est très facile d'exciter avec un doublet émetteur un guide à section circulaire en* H_{11} *ou un guide rectangulaire en* H_{10} (*fig.* 6). Les guides utilisés sont en cuivre rouge ou en laiton de 35 mm de diamètre pour les circulaires et de 45 × 22,5 mm pour les rectangulaires.

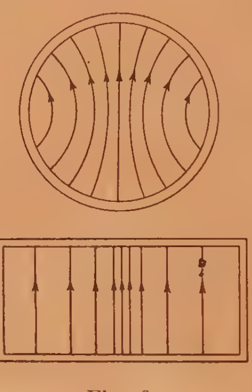


Fig. 6.

On peut montrer l'action d'un guide d'onde comme collecteur et conducteur en intercalant un élément de tuyau tels que ceux décrits plus haut (1 à 2 m de longueur) entre l'émetteur et le récepteur; le gain obtenu est considérable.

c. Propriétés des cornets. — Les cornets ont pour but de rayonner dans l'espace l'énergie transmise par un guide d'ondes; ils permettent de boucler un guide fini sur son impédance caractéristique et possèdent un effet directif très accentué. *Il est possible d'associer des cornets aux guides excités en amorties.* Le cornet utilisé est en laiton et conique; sa longueur, comptée le long d'une génératrice, est de 15 cm et son angle de 50°; il se raccorde au guide circulaire de 35 mm de diamètre par une flasque vissée sur une pièce portée par l'extrémité du guide. On peut montrer le gain produit par le cornet en faisant deux expériences, l'une avec cornet, l'autre sans. Le gain mesuré est de 13 db; ce nombre est de l'ordre de grandeur de celui indiqué par Southworth [5] pour un cornet identique excité en entretenues.

d. Antennes diélectriques. — Les antennes diélec-

triques [6] sont constituées par des tubes diélectriques dont la longueur est de l'ordre de 6 λ et le diamètre de l'ordre de 0,8λ ; l'épaisseur optimum du tube varie avec la nature du diélectrique, mais est de l'ordre de 0,03 λ. On peut montrer le gain produit par une antenne diélectrique en utilisant un simple tube de carton de 2 mm d'épaisseur et de 35 mm de diamètre emboîté dans un élément de guide contenant le détecteur.

e. Un émetteur fort commode pour beaucoup d'expériences a été réalisé en associant l'émetteur à un tronçon de guide et à un cornet. — L'émetteur est placé dans un tronçon de guide circulaire muni d'un piston réflecteur et terminé à l'autre extrémité

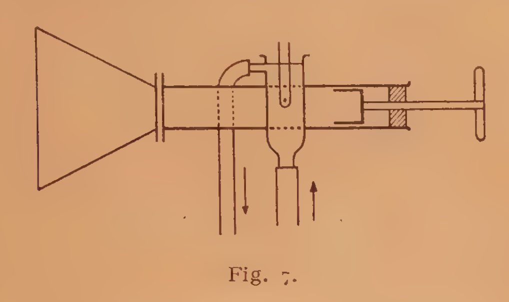


Fig. 7.

par un cornet conique dont l'ouverture a 20 cm de diamètre. Le doublet excite l'onde H_{11} dans le guide circulaire et le cornet rayonne toute l'énergie produite. On a ainsi un effet de concentration et de directivité très accusé, le gain de ce dispositif, mesuré expérimentalement, étant de l'ordre de 15 db (*fig.* 7).

2. **Quelques expériences « d'optique » réalisables en ondes centimétriques.** — *a. Réflexion.* — On utilise l'émetteur associé à un cornet décrit plus haut; on fait réfléchir le rayonnement sur une plaque métallique de 30×30.

b. Réfraction. — Le verre n'est pas absorbant pour ces longueurs d'onde; on peut réaliser une expérience très réussie à l'aide d'une grande lentille convergente de 30 cm de diamètre et de 50 cm de distance focale dans le visible. Le montage de l'expérience est schématisé figure 8. Si l'on déplace le détecteur sur l'axe de la lentille, la déviation passe par un maximum très aigu pour un point de cet axe mettant en évidence la focalisation par la lentille. On peut ainsi montrer que la distance focale d'une lentille est plus courte dans l'hertzien que dans le visible.

Un effet de focalisation analogue à celui d'une lentille peut être obtenu en plaçant un prisme de paraffine d'angles 90, 45 et 45° entre la source et

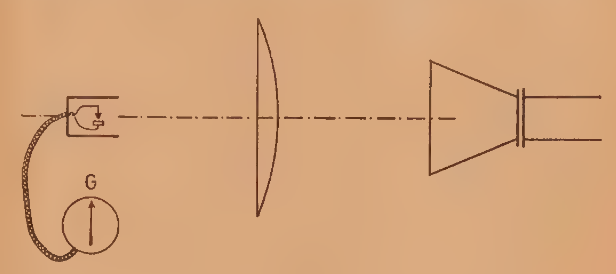


Fig. 8.

le récepteur; la face hypoténuse est tournée vers le récepteur et perpendiculaire à la direction du rayonnement; on sait en effet qu'on peut grossièrement assimiler une lentille à deux prismes accolés par leurs bases.

c. Absorption. — On place une cuve de 1 cm d'épaisseur entre l'émetteur et le détecteur; on peut ainsi montrer l'absorption de différents liquides. L'eau est particulièrement absorbante pour ces longueurs d'onde et une épaisseur de 1 cm arrête complètement le rayonnement; la main placée devant le récepteur arrête également les ondes par suite de la présence d'eau dans les tissus.

d. Interférences. — Entre l'émetteur et le récepteur on interpose deux lames de verre parallèles entre elles et dont on peut faire varier la distance. On observe la production d'interférences qui se traduisent par des maxima et des minima très nets dans l'intensité du courant détecté; on peut observer facilement six maxima successifs.

e. Ondes stationnaires. — Le détecteur, sans son blindage, est simplement soutenu par ses fils à 80 cm environ de l'émetteur; une plaque métallique de 30×30 cm peut être lentement déplacée en restant perpendiculaire à la direction du rayonnement. Les maxima successifs sont encore plus nets que dans le cas précédent; on peut en compter une dizaine. Par ce procédé on peut mesurer la longueur d'onde du rayonnement; c'est ainsi qu'il a été possible de déterminer aisément la longueur d'onde $\lambda = 4{,}4$ cm pour l'oscillateur décrit.

Manuscrit reçu le 10 mars 1947.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Nichols et Tear, *Phys. Rev.*, 1923, **21**, p. 687.
[2] O. Betz, *Ann. der Physik*, 1932, **5**, p. 321.
[3] L. Brillouin, *R. G. E.*, 1936, **40**, p. 227. — Grivet, *Onde électrique*, 1946, **26**, pp. 136 et 176.
[4] Melloh, *Proc. I. R. E.*, 1940 (avril).
[5] Southworth et King, *Proc. I. R. E.*, 1939 (février).
[6] *Antennes diélectriques* (*Onde Elect.*, 194., **26**, p. 387).

PARAMAGNÉTISME DE QUELQUES COMPOSÉS DU MANGANÈSE

Par M[lle] A. SERRES.
Institut de Physique de Strasbourg.

Sommaire. — Deux séries de composés ont été étudiées :

1° Les composés définis MnAs, MnSb, Mn_2Sb, MnSn au-dessus de leurs points de Curie ferromagnétiques.

MnAs suit la loi de Weiss au-dessus de 126° C; MnSb au-dessus de 445° C; Mn_2Sb et MnSn ne suivent pas la loi de Weiss.

2° Les composés MnS, MnSe et MnTe présentant un point de transformation λ à basse température.

Au-dessus de la température ordinaire MnS et MnSe suivent la loi de Weiss. Pour MnTe, le point λ est beaucoup plus élevé (307° K). La variation de l'aimantation a été étudiée depuis la température de l'air liquide jusqu'à 772°,5 K; χ croît d'abord de 91° K à la température λ, puis décroît, d'abord plus vite que la loi de Weiss et semble suivre cette loi au-dessus de 700° K.

Paramagnétisme de quelques composés du manganèse. — Le manganèse métallique possède un paramagnétisme faible, variant très légèrement avec la température (1). Il devient ferromagnétique dans certains de ses alliages, qui présentent un point de Curie généralement bas. M. Guillaud (1) a préparé des alliages binaires de manganèse, d'une très grande pureté chimique et de composition très bien définie; il en a étudié le ferromagnétisme. Il a bien voulu me donner quelques échantillons de ces alliages.

J'ai étudié le paramagnétisme, au-dessus de leur point de Curie, des combinaisons définies : MnAs, MnSb, Mn_2Sb, MnSn.

D'autre part, le manganèse donne, avec les métalloïdes de la famille de l'oxygène, des composés à point de transformation λ où les chaleurs spécifiques [3, 4, 5] et l'aimantation [6, 7, 8] présentent une anomalie. L'aimantation passe par un maximum à la température λ : Squire [8] considère cette température comme un point de Curie avec passage de l'antiferromagnétisme au paramagnétisme. J'ai étudié les composés MnS et MnSe au-dessus du point de transformation et MnTe depuis la température de l'air liquide jusqu'à 500° C.

Les mesures d'aimantation ont été faites par la méthode d'attraction dans un champ non uniforme avec l'appareil déjà décrit [9] et la précision que j'ai indiquée dans des travaux antérieurs [10]. Je n'ai retenu, pour cette étude, que les échantillons de composition chimique bien connue et bien définie, ne présentant aucune trace de ferromagnétisme dans l'intervalle de température étudié.

MnAs. — Les propriétés thermomagnétiques de MnAs ont été étudiées par Bates [11]. Il a trouvé que ce composé est ferromagnétique jusqu'à la température de 45° C, la chute de l'aimantation étant très rapide de 38 à 45°. Par refroidissement, le ferromagnétisme ne réapparaissait qu'à la température de 34° C. Au-dessus de 45°, le composé était paramagnétique : l'aimantation était fonction du champ et de la température jusqu'à 92° C, sensiblement indépendante du champ et de la température de 92 à 130°; de 130 à 370° la substance suivait la loi de Weiss. Bates a calculé, pour cet intervalle, un moment de 20,8 magnétons de Weiss et un point de Curie paramagnétique de 274°,5 K ou 1°,5 C.

J'ai étudié différents échantillons de MnAs préparés par Guillaud et un échantillon fourni par Bates, ce dont je le remercie vivement.

Les résultats sont à peu près identiques avec les différents échantillons. Les faibles écarts des valeurs absolues proviennent probablement de petites variations dans la composition.

Le ferromagnétisme disparaît à 45° C pour tous les échantillons et, par refroidissement, reparaît à 34° pour l'échantillon de Bates et à 29° pour les échantillons de Guillaud.

Au-dessus de 45°, se délimitent toujours trois régions de température où MnAs se comporte différemment :

1° au-dessus de 126°, une région de paramagnétisme normal, indépendant du champ et suivant la loi de Weiss jusqu'à 375°, avec les constantes suivantes :

Échantillon de Bates :

$$C_m = 2{,}60, \quad \theta_p = 283° \mathrm{K} \quad \text{où} \quad 10° \mathrm{C}$$
$$\text{et} \quad n = 22{,}6 \text{ magnétons.}$$

Échantillons de Guillaud :

$$C_m = 2{,}62, \quad \theta_p = 10 \quad \text{ou} \quad 12° \mathrm{C}$$
$$\text{et} \quad n = 22{,}7 \text{ magnétons.}$$

2° de 50 à 126° pour l'échantillon de Bates,

de 90 à 126° pour les deux échantillons les plus voisins de la composition MnAs de Guillaud, l'aimantation croît légèrement quand la température s'élève, mais la variation n'est pas tout à fait réversible;

3° au-dessous de 50° C pour l'échantillon de Bates, et au-dessous de 90° pour ceux de Guillaud, j'ai pu mesurer en refroidissant lentement la substance, une aimantation paramagnétique fonction du champ, mais croissant très rapidement quand la température s'abaisse. La figure 1 résume ces résultats.

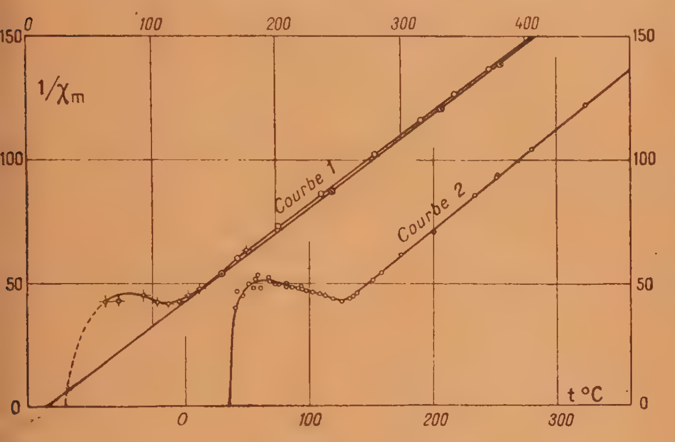


Fig. 1. — MnAs.
Courbes I, échantillons de Guillaud;
Courbe II, échantillon de Bates.

Tableau I. — MnAs *de Bates*.

t (°C).	$\chi_m.10^6$.	$\frac{1}{\chi_m}$.	t (°C).	$\chi_m.10^6$.	$\frac{1}{\chi_m}$.
37,1....	23615	42,35	52,3....	20412	48,99
39,6....	20510	48,76	59,1....	19060	52,47
42,5....	21419	46,69	60,1....	19254	51,94
43,6....	19726	50,69	64,4....	19866	50,34
48,4....	20576	48,46	64,5....	19961	50,10
48,5....	18976	52,70	73,7....	19631	50,94
49,4....	18803	53,18	75,4....	20056	49,86
			81,9....	20268	49,34
127,2....	22130	45,19	87,8....	20482	48,82
128,7....	21939	45,58	88,2....	20282	49,30
132,4....	21225	47,11	91,7....	20486	48,81
147,2....	19004	52,62	95,6....	20605	48,53
154,8....	17976	55,63	101,0....	20961	47,71
171,0....	16107	62,08	106,4....	21239	47,08
198,2....	13858	72,16	107,8....	21334	46,88
231,6....	11757	85,06	116,5....	21975	45,51
256,4....	10500	95,24	117,9....	21975	45,51
257,1....	10572	95,49	123,7....	22228	44,99
281,3....	9585	104,33			
322,5....	8293	120,58			

Guillaud [2] considère que la température de 45° n'est pas un vrai point de Curie, mais un point de transformation. La courbe $\sigma_s^2 = f(T)$ (*fig.* 2), carré

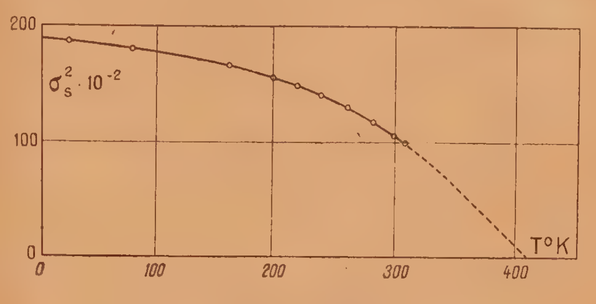


Fig. 2. — MnAs.
Aimantation à saturation (Guillaud).

de l'aimantation spontanée en fonction de la température, par une extrapolation assez lointaine montre que σ_s ne disparaîtrait que vers 130° C s'il n'y avait pas de changement d'état à 45° C. L'étude aux rayons X a montré une modification du réseau cristallin, consistant en une contraction anisotrope du réseau et discontinuité de volume à 45°. Guillaud a complété ces résultats par une étude de la résistance électrique. La courbe qu'il a obtenue, reproduite figure 3, montre un accroissement très brusque

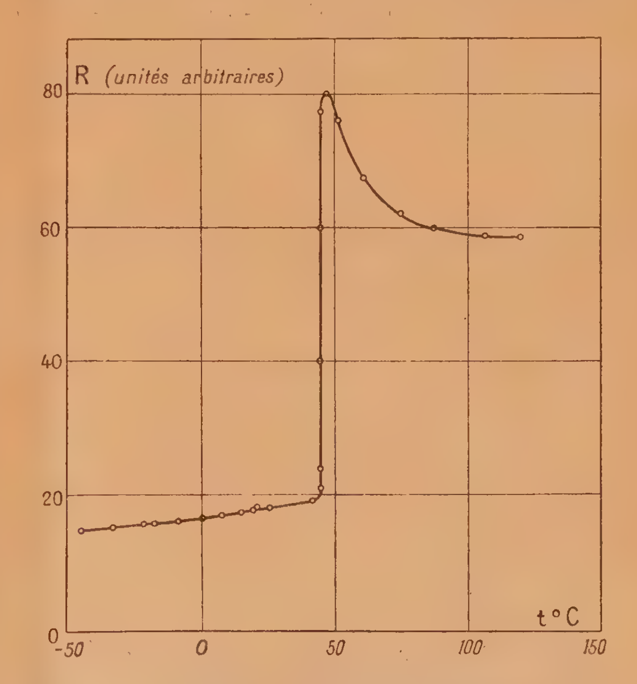


Fig. 3. — Variation de la résistance électrique de MnAs avec la température (Guillaud).

de résistance de 45 à 47°, puis R diminue jusque vers 100°, puis recommence à croître lentement. Tous ces résultats peuvent s'expliquer par une

modification de l'état électronique des atomes, ayant pour effet de diminuer la densité des électrons libres. Guillaud pense qu'on peut envisager une libération progressive des électrons $3d$ de façon à retrouver l'état $3d^7$ à 126°.

TABLEAU II. — MnAs *de Guillaud.*

t (°C).	$\chi_m.10^6$.	$\frac{1}{\chi_m}$.	Échantillons.	t (°C).	$\chi_m.10^6$.	$\frac{1}{\chi_m}$.
63,2...	24303	41,15		165,7...	17021	58,75
74,4...	23314	42,89	N° 1	201,4...	13797	72,48
93,5...	22706	44,04	←	235,6...	11743	85,16
105,5...	22766	43,92		280,6...	9805	101,99
115,7...	23015	43,45	N° 2	316,4...	8662	115,45
122,5...	22900	43,67	→	346,2...	7919	126,28
129,2...	22145	45,16		372,6...	7323	136,56
139,0...	20657	48,41				
174,4...	16168	61,85		153,5...	18860	53,02
				243,9...	11500	86,96
			N° 3	333,7...	8275	120,85
			→	380,4...	7190	139,08

MnSb. — MnSb est obtenu en poudre cristalline. Le point de Curie ferromagnétique est $\theta_f = 313°$ C. Au-dessus de ce point, la représentation de $\frac{1}{\chi}$ en fonction de T donne la courbure habituelle sur un intervalle d'environ 120°; puis de 445 à 600° C, une partie rectiligne d'où je déduis les constantes

$$C_m = 2{,}085, \quad n = 20{,}3 \text{ magnétons de Weiss,}$$

avec un point de Curie paramagnétique $\theta_p = 335°$ C.

Guillaud a trouvé un moment à saturation de 17,53 magnétons de Weiss.

TABLEAU III. — MnSb.

t (°C).	$\chi_m.10^6$.	$\frac{1}{\chi_m}$.
366,9...	50013	20,00
391,7...	33082	30,23
417,1...	24473	40,86
445,1...	18863	53,01
458,7...	16721	59,80
491,1...	13403	74,61
522,7...	11114	89,97
535,5...	10322	96,88
540,9...	10140	98,62
541,6...	10145	98,57
544,5...	10025	99,75
553,9...	9491	105,36
601,5...	7807	128,09

MnSb se comporte au-dessous de 313° comme un ferromagnétique normal, au-dessus comme un paramagnétique normal.

Mn_2Sb. — Le manganèse et l'antimoine donnent une autre combinaison définie ferromagnétique : Mn_2Sb. On l'obtient en monocristaux, le réseau est quadratique. Le moment à saturation obtenu par Guillaud, rapporté à tous les atomes de Mn, est : $n = 4{,}65$ magnétons de Weiss avec un point de Curie ferromagnétique $\theta_f = 277°$ C.

J'ai étudié la substance pulvérisée, puis un cristal unique suivant trois directions rectangulaires. La variation de $\frac{1}{\chi}$ en fonction de la température est représentée par des courbes très voisines quel que soit l'échantillon étudié et l'orientation des axes : elles présentent une forte concavité vers l'axe des températures (*fig.* 4).

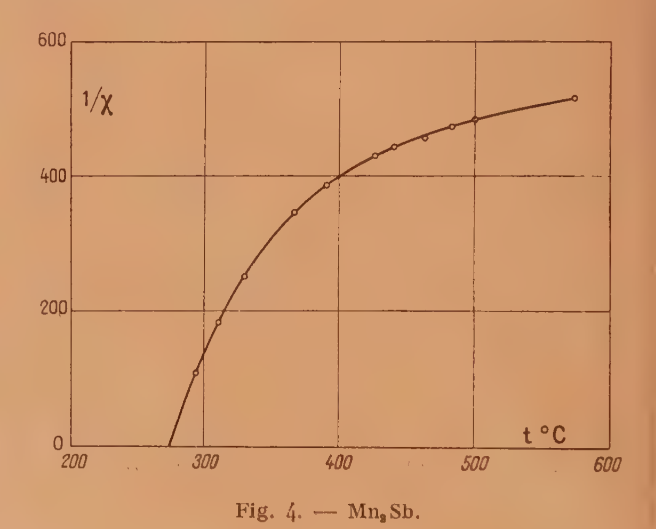


Fig. 4. — Mn_2Sb.

On peut chercher à expliquer cette courbure en supposant que les deux atomes de Mn sont différents, tant au point de vue des moments que des champs moléculaires; par exemple, admettre qu'un atome est doué de paramagnétisme constant, l'autre d'un paramagnétisme variable suivant la loi de Weiss. Le calcul tenté dans ce sens ne donne pas un résultat satisfaisant.

On peut faire l'hypothèse, déjà émise par M. Foëx [12] pour expliquer la variation de l'aimantation de MnSi, et reprise par Guillaud pour interpréter la courbe de l'aimantation à saturation de Mn_2Sb : libération progressive d'électrons quand la température s'élève.

Dans cette hypothèse, de la courbe obtenue je peux déduire que le moment s'élève progressivement de 5,5 à 19,3 magnétons de Weiss entre 280 et 575° C. Mn fixerait des électrons de Sb qui seraient progres-

sivement libérés par chauffage et atteindraient le moment de l'atome neutre vers 500° C.

TABLEAU IV. — Mn_2Sb.

t (°C).	$\chi_m.10^6$.	$\frac{1}{\chi_m}$.
292,1...	9560	104,6
307,7...	5420	184,5
325,1...	4001	249,9
364,2...	2867	348,8
394,5...	2554	391,5
424,5...	2344	426,6
437,4...	2286	437,4
460,6...	2204	453,7
481,0...	2126	470,4
498,4...	2084	479,8
573,4...	1925	519,5

MnSn. — Guillaud a établi l'existence de la combinaison définie MnSn de moment à saturation 6,1 magnétons de Weiss.

TABLEAU V. — MnSn.

t (°C).	$\chi_m.10^6$.	$\frac{1}{\chi_m}$.
79,9...	14781	67,65
115,1...	10771	92,84
153,8...	8347	119,8
195,2...	6788	147,3
236,0...	5794	172,6
292,1...	4809	207,9
320,6...	4452	224,6
345,1...	4155	240,7
360,5...	4006	249,6
381,4...	3843	260,2
428,6...	3510	284,9
480,0...	3210	311,5
485,2...	3176	314,9
530,1...	2956	338,3
546,3...	2878	347,5
569,7...	2833	353,0
570,0...	3176	353,8

Le point de Curie ferromagnétique est bas :

$$\theta_f = -10° \text{C} \quad \text{ou} \quad 263° \text{K}.$$

Au-dessus de cette température, le composé est paramagnétique, mais ne suit pas la loi de Weiss. La représentation de $\frac{1}{\chi}$ en fonction de la température est une courbe à faible concavité vers l'axe des températures, beaucoup moins accentuée qu'avec Mn_2Sb. En calculant comme pour ce composé, le moment s'élèverait progressivement de 16,2 vers 0° C, à 22,5 magnétons vers 550° C. Le Mn aurait ici, aux faibles températures, emprunté un électron à Sn et aux températures élevées il serait ionisé une fois.

Composés de Mn avec O, S, Se et Te. — Pour cette famille de composés, les différents auteurs : Haraldsen et Klemm [6], puis Bizette, Squire et Tsaï [9] pour MnO, puis Squire [8], ont trouvé que l'aimantation décroît au-dessus et au-dessous de la température λ où Millar [13] et Andersen [14] pour MnO et MnS et Kelley [15] pour MnSe et MnTe, ont trouvé une discontinuité dans la variation des chaleurs spécifiques. Au-dessous du point λ, l'aimantation est fonction du champ. Au-dessus de λ, la variation de χ suit plus ou moins la loi de Weiss. J'ai cherché à préciser les valeurs de l'aimantation dans cette région de paramagnétisme normal; pour MnS et MnSe, le point λ est bas (140° K et 247° K). Les échantillons étaient obtenus par fusion en chauffant en tube scellé, vidé, du Mn et le métalloïde pulvérisés dans les proportions voulues.

MnS. — Avec ce composé, j'ai obtenu de la température ordinaire à 775° K une variation rectiligne de $\frac{1}{\chi}$ en fonction de T donnant les constantes

$$C_m = 3{,}485, \qquad n = 26{,}2 \text{ magnétons}$$

avec

$$\theta_p = -454° \text{K}.$$

TABLEAU VI. — MnS.

t (°C).	$\chi_m.10^6$.	$\frac{1}{\chi_m}$.
19,9...	4642	215,4
80,8...	4306	232,2
151,5...	3962	252,4
238,3...	3599	277,8
323,5...	3307	302,4
330,5...	3278	305,1
418,0...	3044	328,5
499,7...	2817	355,0

MnSe. — J'ai étudié la variation de χ de la température ordinaire à 550° C et trouvé

$$C_m = 4{,}01, \qquad n = 28{,}1 \text{ magnétons}$$

et

$$\theta_p = -361° \text{K}.$$

Tableau VII. — MnSe.

t (°C).	$\chi_m . 10^6$.	$\frac{1}{\chi_m}$.
20,5...	6181	161,8
80,0...	5615	178,1
145,5...	5146	194,3
238,7...	4584	218,1
340,3...	4109	243,4
435,5...	3747	266,8
513,4...	3473	287,9

MnTe. — Le dernier composé de cette série présente certaines différences avec les précédents : son point de transformation λ est notablement plus élevé (307° K d'après Kelley [15]); d'autre part, Squire a étudié la variation de la conductibilité électrique de ces composés avec la température : alors que MnO, MnS, MnSe se comportent comme des non-conducteurs, de grande résistance de l'ordre de 10^5 à la température ordinaire, croissant régulièrement quand la température s'élève, la conductibilité de MnTe est beaucoup plus grande et classe ce composé parmi les semi-conducteurs. La résistance (*fig.* 5) croît d'abord avec la température,

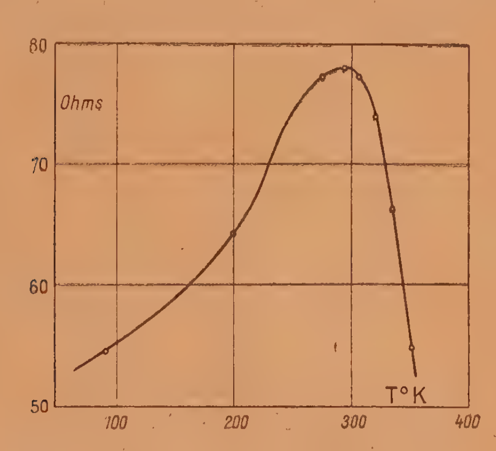


Fig. 5. — Variation de la résistance de MnTe avec la température (Squire).

passe par un maximum au point λ puis décroît. Cette variation est comparable à celle donnée par MnAs et étudiée par Guillaud (*fig.* 3).

Au point de vue magnétique, les mesures de Haraldsen et Klemm et les miennes donnent des résultats analogues.

Les valeurs de $\frac{1}{\chi}$ que j'ai obtenues de la température de l'air liquide à 800° K sont indiquées figure 6, courbe 1; les déterminations faites par Haraldsen et Klemm (courbe 2) peuvent se placer sur une courbe sensiblement parallèle; les valeurs de χ que j'ai mesurées étant plus fortes que les

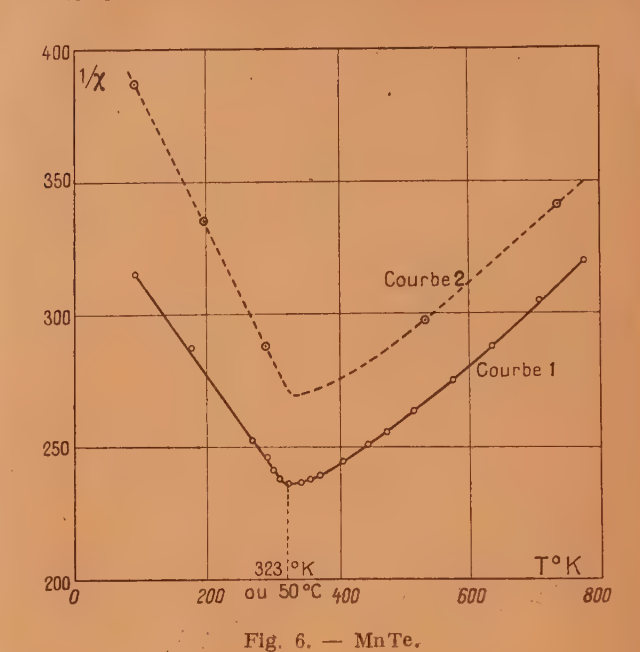


Fig. 6. — MnTe.

valeurs obtenues par ces auteurs et indépendantes du champ. Le maximum d'aimantation, pour les échantillons que j'ai étudiés se trouve à 50° C, soit 323° K.

Tableau VIII. — MnTe.

t (°C).	T (°K).	$\chi_m . 10^6$.	$\frac{1}{\chi_m}$.
—182,1	91,0	3185	314,0
—101,4	171,7	3448	290,6
0	273,1	3962	252,4
18,0	291,1	4077	245,3
29,0	302,1	4151	240,9
38,7	311,8	4209	237,6
50,6	323,7	4220	237,0
67,5	340,6	4210	237,5
81,8	354,9	4191	238,6
97,1	370,2	4160	240,4
133,0	406,1	4070	245,7
164,8	437,9	3988	250,75
189,5	462,6	3917	255,3
230,5	503,6	3805	263,1
299,0	572,1	3611	276,9
358,3	631,4	3452	289,7
423,4	696,5	3291	303,85
499,4	772,5	3121	320,4
20,7	293,8	4078	245,2

Au-dessus de cette température, la courbe 1 est convexe vers l'axe des températures et tend asymptotiquement au-dessus de 700° K vers une droite de constantes

$$C_m = 4{,}59, \qquad n = 30{,}1 \text{ magnétons}$$

et

$$\theta_p = -690^\circ \text{K}.$$

Ce moment a déjà été rencontré pour l'ion Mn^{++}.

Squire pense que l'état normal de l'ion Mn^{++} étant l'état S^6 où seul le spin fournit le paramagnétisme, cet état existe aux hautes températures. Au-dessous du point λ, les spins sont bloqués antiparallèlement et au zéro absolu χ doit être nul.

Les mesures d'aimantation montrent que l'état S^6 de l'ion Mn'' serait atteint vers 700° K.

Manuscrit reçu le 7 juillet 1947.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Serres, *J. de Physique*, 1936, IX, p. 377.
[2] Ch. Guillaud, *Thèse*, Strasbourg, 1943, et *C. R. Acad. Sc.*, 1944, **219**, p. 393.
[3] K. K. Kelley, *J. Am. Chem. Soc.*, 1939, **61**, p. 203.
[4] R. M. Millar, *J. Am. Chem. Soc.*, 1928, **50**, p. 1875.
[5] Anderson, *J. Am. Chem. Soc.*, 1931, **53**, p. 476.
[6] Haraldsen et Klemm, *Z. für anorg. und allgem. Chem.*, 1934, **220**, p. 183.
[7] H. Bizette, Squire et Tsaï, *C. R. Acad. Sc.*, 1938, **207**, p. 449.
[8] Ch. F. Squire, *Phys. Rev.*, 1939, **56**, p. 922 et 960.
[9] G. Foëx et R. Forrer, *J. de Physique*, 1926, **7**, p. 180.
[10] A. Serres, *Ann. de Physique*, 1932, **17**, p. 5.
[11] F. Bates, *Philosophical Magazine*, 1929, **8**, p. 714.
[12] G. Foëx, *J. de Physique*, 1938, **9**, p. 37.

TRANSPARENCE AU SON DE PANNEAUX ÉLASTIQUES ENCOLLES DE MATÉRIAUX POREUX

Par Théodore VOGEL.
Centre de Recherches S. I. M., Marseille.

Sommaire. — Les résultats antérieurement obtenus pour des plaques élastiques isolées ou couplées sont étendus à des systèmes hétérogènes constitués par un support élastique et un revêtement poreux, tel que du feutre. La transparence acoustique de ces systèmes se trouve, moyennant des hypothèses très générales sur l'absorption du son dans la couche poreuse, comprise entre deux bornes dont la valeur théorique est confrontée aux résultats de l'expérience.

Dans deux publications antérieures, l'auteur a étudié les vibrations d'une plaque élastique rectangulaire, posée sur ses bords, sous l'action d'ondes sonores planes se propageant normalement à elle (1), et celles d'un panneau double constitué par deux telles plaques séparées par une couche d'air d'épaisseur constante (2). Ce dernier problème conduit, en faisant tendre vers zéro l'épaisseur de la couche d'air, au cas d'un panneau hétérogène composé de deux plaques accolées; et, d'autre part, les propriétés élastiques des deux constituants peuvent être nettement différentes sans que la théorie du système cesse d'être valable.

Il a donc paru intéressant de tenter l'extension de la théorie en question au cas de plaques élastiques encollées d'une couche de matériau tel que le feutre, l'amiante, etc., ce cas se rencontrant dans les applications à l'acoustique architecturale, et, en particulier, à l'insonorisation des avions. Une telle extension n'est évidemment possible qu'à condition d'adopter une certaine représentation du « corps poreux », schématisation qui, en l'état actuel de nos connaissances, ne saurait serrer la réalité de très près : les formules auxquelles conduira l'étude ne fourniront donc que des bornes encadrant la transparence réelle du panneau. Les vérifications expérimentales rapportées plus loin montrent cependant que l'accord est meilleur qu'on ne pouvait le craindre, de sorte que les bornes indiquées par la théorie sont pratiquement utilisables comme approximation, tant en valeur absolue que pour la discussion *a priori* des qualités d'un panneau donné.

Représentation schématique du corps acoustiquement poreux. — Il s'agit d'adopter une image simple du « corps poreux acoustique », qui en retienne les caractéristiques essentielles communes aux différents matériaux techniques sous-entendus, comme

(1) Th. Vogel, *J. de Physique*, juillet 1946, p. 193.
(2) Th. Vogel, *Rev. Scientifique*, 15 novembre 1946, p. 515.

le fait le « corps élastique » de la théorie pour les solides habituels. Le schème le plus connu est celui de Lord Rayleigh ([3]), suivant lequel le corps est constitué par un solide percé de canalicules normaux à sa surface; les molécules d'air animées de vitesse par l'onde sonore viennent frapper les parties pleines, et alors tout se passe comme pour un solide élastique; ou bien elles pénètrent dans les canalicules, où leur énergie est partiellement absorbée par viscosité et échauffement, dans une mesure que permet de prévoir la théorie des tuyaux acoustiques étroits. On conçoit *a priori* que les deux paramètres qui gouvernent le comportement du corps poreux selon Rayleigh soient la porosité (rapport des pleins et des creux) et le diamètre des canalicules. Ce schème a été discuté et retouché par divers auteurs, notamment par Zwikker et ses collaborateurs ([4]), qui ont introduit, en particulier, une correction pour tenir compte des cavernes intérieures et de l'obliquité éventuelle des canalicules. L'expérience montre que la théorie ainsi complétée ne rend pas trop mal compte de l'allure générale des phénomènes. Mais l'accord n'est qu'assez grossier pour certains matériaux; de plus, si une théorie physique a pour rôle essentiel de permettre une prévision correcte des résultats observables, encore faut-il, par ailleurs, qu'elle satisfasse l'esprit et cadre avec nos connaissances dans les domaines connexes, sous peine de n'être qu'une recette empirique. Or il est suffisamment clair que les matériaux techniques dont il s'agit ici, composés de fibres solides plus ou moins longues agglomérées à peu près au hasard (à telles enseignes que certains de ces produits sont quasi isotropes, ce que ne saurait être le corps poreux de Rayleigh), ne peuvent être sérieusement assimilés à des assemblages de canalicules, même inclinés ou renflés intérieurement; et cependant, il est certain que l'air circule d'une manière ou d'une autre entre ces fibres, et que c'est cette circulation qui véhicule principalement le son. Les théories récentes qui assimilent cet air occlus à un fluide jouissant d'une constante de propagation et d'une impédance acoustique spécifique, toutes deux complexes ([5]), paraissent ouvrir une voie très intéressante à des recherches plus approfondies. Il semble toutefois préférable de ne pas trop s'engager, pour l'instant, et de laisser dans une certaine indétermination la nature profonde ou physique du phénomène, puisque aussi bien c'est un point de vue plutôt mécanique qui doit prévaloir ici. On admettra donc simplement, ce qui n'est inconsistant avec aucune des explications rappelées, que le corps de porosité géométrique moyenne P (densité des fibres écrasées et réduites à l'état de corps homogène égale à la densité de l'échantillon poreux, multipliée par $1 - P$) se comporte, pour une fraction $(1 - P)$, comme un solide d'élasticité négligeable, transmettant intégralement les vibrations à son support; et, pour une fraction P, comme un milieu dans lequel l'énergie se transmet avec un affaiblissement A. Quant aux observables de l'expérience, ce sont la transparence $\mathcal{T}$ et l'absorption à la réflexion $\mathcal{A}$, définies comme les rapports à l'énergie incidente de l'énergie transmise et de l'énergie non réfléchie. Le coefficient $\mathcal{A}$ sera donc, dans ce qui suit, supposé connu : soit par une expérience indépendante, puisqu'il est directement observable, soit par la théorie, si l'on en choisit une; et le problème consiste à exprimer la transparence $\mathcal{T}$ du panneau composite.

Transparence d'une plaque encollée de matériau poreux. — Soit une plaque élastique mince identique à celle étudiée dans le travail cité ([1]), e son épaisseur, m sa masse par unité de surface, a, b ses dimensions, ω_{rs} son spectre; collons sur elle une couche poreuse de porosité géométrique P, de masse par unité de surface μm, d'élasticité négligeable [$\xi \neq 0$ dans les notations de ([2])]. Deux cas pourront se présenter :

a. Le côté encollé est à l'arrière. — La force généralisée appliquée est la même que pour la plaque homogène ([1]), soit

$$\frac{2\rho c a b}{\pi^2 r s}(1 - \cos r\pi)(1 - \cos s\pi)\sin\omega t - \frac{\rho c a b}{2}\dot{q}_{rs};$$

elle met en vibration une double paroi à couplage infiniment serré avec de plus $\xi = 0$. L'équation du mouvement est donc ([2])

$$\ddot{q}_{rs} + \frac{2\rho c}{m(1+\mu)}\dot{q}_{rs} + \frac{\omega_{rs}^2}{1+\mu}q_{rs} = \frac{32\rho c}{\pi^2 r s m(1+\mu)}\sin\omega t.$$

qui revient à celle de la plaque homogène ([1]), si l'on remplace, dans cette dernière m par $m(1+\mu)$ et ω_{rs}^2 par $\frac{\omega_{rs}^2}{1+\mu}$. Dans le calcul de la transparence fait pour la plaque homogène, il suffira de remplacer de même les expressions correspondantes; ce qui donne

$$\frac{0{,}32\,K}{ab\omega} < \mathcal{T}_1 < \frac{0{,}32\,K}{ab\omega} + \frac{4\rho^2 c^2}{m^2\omega^2(1+\mu)^2}. \qquad (1)$$

Plus la surcharge poreuse sera importante, et plus $\mathcal{T}_1$ se rapprochera de sa borne inférieure ; le premier effet du revêtement est de diminuer le « terme de Davis ».

L'expression (1) donne la proportion d'énergie acoustique incidente qui se retrouve sur la face arrière de la plaque élastique. Que devient-elle ? Les parties pleines du revêtement suivent exac-

([3]) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 2e édit., § **331**.
([4]) C. Zwikker, *De Ingenieur*, 1932, **47**, p. 177 A. — Kosten et Zwikker, *Physica*, 1941, **8**, p. 251, 933, 968 et suiv. — Zwikker, Van der Eijk et Kosten, *Physica*, 1941, **8**, p. 469 et 1094.
([5]) Morse et Bolt, *Rev. Modern Phys.*, 1944, **16**, p. 69. — R. A. Scott, *Proc. Phys. Soc.*, 1946, **58**, p. 165 et 358.

tement les vibrations de leur support, et les communiquent à l'air ambiant : une fraction $(1 - P)$ de l'énergie ci-dessus est donc intégralement utilisée sous forme sonore; la partie P, au contraire, communiquée par la plaque à l'air occlus et par celui-ci à l'air extérieur, est affaiblie dans une proportion A. La transparence finale du système est donc

$$\mathcal{T} = (1 - P)\mathcal{T}_1 + AP\mathcal{T}_1 = [1 + (1 - A)P]\mathcal{T}_1; \qquad (2)$$

d'ailleurs, l'affaiblissement A étant compris entre 0 et 1,

$$\frac{0{,}32\,K(1-P)}{ab\omega} < \mathcal{T} < \frac{0{,}32\,K}{ab\omega} + \frac{4\rho^2 c^2}{m^2\omega^2(1+\mu)^2}. \qquad (2')$$

Les deux bornes de la transparence sont abaissées, en fin de compte, l'une par l'effet de la porosité géométrique, l'autre par celui de la surcharge. On remarquera que l'impédance spécifique du matériau ne figure pas dans la formule, mais elle n'a effectivement aucun rôle à y jouer, même si l'on adopte la manière de voir de Scott : car l'énergie transmise à l'air extérieur dépend de la résistance acoustique de celui-ci et de la vitesse qui lui est communiquée, qui est la vitesse de l'air occlus. Le rapport entre vitesse et pression dans l'air occlus n'importe pas ici.

b. Le côté encollé est à l'avant. — Si la porosité est nulle, le panneau se comporte comme une plaque élastique surchargée, sa transparence est donc $\mathcal{T}_1$, et la proportion d'énergie réfléchie est $1 - \mathcal{T}_1$. C'est bien dans cette proportion que sont réfléchies les molécules qui frappent les parties pleines de la couche poreuse, soit $(1 - P)(1 - \mathcal{T}_1)$. Par contre, une fraction P de l'énergie incidente pénètre la couche poreuse, y subit un affaiblissement A, et excite les vibrations de la plaque élastique; si $\mathcal{T}_2$ est la transparence de celle-ci, l'air extérieur à l'arrière du panneau reçoit une fraction $AP\mathcal{T}_2$, cependant que la fraction $AP(1 - \mathcal{T}_2)$ est réfléchie dans la couche poreuse et en ressort par l'avant affaiblie dans le rapport A, ce qui la réduit à $A^2 P(1 - \mathcal{T}_2)$. Si l'on résume ce bilan énergétique, l'énergie réfléchie s'écrit

$$1 - \mathcal{A} = (1 - P)(1 - \mathcal{T}_1) + A^2 P(1 - \mathcal{T}_2)$$

et l'énergie transmise

$$\mathcal{T} = AP\mathcal{T}_2;$$

d'où, en portant dans la dernière relation la valeur de A tirée de la première,

$$\mathcal{T} = P\mathcal{T}_2\sqrt{\frac{1 - \mathcal{A} + (P - 1)(1 - \mathcal{T}_1)}{P(1 - \mathcal{T}_2)}}. \qquad (3)$$

Les transparences $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ ne sont pas rigoureusements les mêmes, car les vibrations de la plaque sont, en fait, excitées par la pression $\rho' c u_0$ de l'air occlus (ρ' impédance acoustique de la couche poreuse), et non par $\rho c u_0$ comme pour $\mathcal{T}_1$, de sorte que les termes en ω^{-1} des deux transparences sont identiques, mais que les « termes de Davis » sont entre eux comme $|\rho'|^2$ est à ρ^2. Cette différence devait être signalée, mais elle est pratiquement négligeable dans les $(1 - \mathcal{T}_i)$, puisque les transparences sont en général de l'ordre de 10^{-2} au plus. On aura donc sensiblement

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1\sqrt{P(1 - \mathcal{A}) + P(P - 1)} = \mathcal{T}_1\sqrt{P(P - \mathcal{A})}, \qquad (3')$$

expression qui est bien toujours réelle, puisque, d'après la formule écrite un peu plus haut, $\mathcal{A} \doteq P(1 - A^2)$ est toujours compris entre 0 et P.

En portant (3′) dans (1), il vient

$$\frac{0{,}32\,K\sqrt{P(P-\mathcal{A})}}{ab\omega} < \mathcal{T} < \frac{0{,}32\,K\sqrt{P(P-\mathcal{A})}}{ab\omega} + \frac{4\rho^2 c^2}{m^2\omega^2}\,\frac{\sqrt{P(P-\mathcal{A})}}{(1+\mu)^2}. \qquad (4)$$

D'ailleurs, $0 \leq \sqrt{P(P - \mathcal{A})} \leq P$: l'utilisation de (4) au lieu de (2′) abaisse la borne supérieure de $\mathcal{T}$ dans le rapport de $\sqrt{P(P - \mathcal{A})}$ à 1 et élève, au contraire, la borne inférieure, pourvu que $\sqrt{P(P - \mathcal{A})}$ soit supérieur à $1 - P$, c'est-à-dire que $P > \frac{1}{2 - \mathcal{A}} > \frac{1}{2}$. La valeur vraie de $\mathcal{T}$ est donc serrée de plus près.

Pour comparer les cas a et b, il suffit de porter la valeur de A, avec la simplification légitime $\mathcal{T}_1 \doteq \mathcal{T}_2 \doteq 1$, dans (2) : la formule analogue à (3′) est alors

$$\mathcal{T} \doteq \mathcal{T}_1\left[1 - P\left(1 - \sqrt{\frac{P - \mathcal{A}}{P}}\right)\right] = \mathcal{T}_1\left[\sqrt{P(P - \mathcal{A})} + (1 - P)\right]. \qquad (3'')$$

Le cas a correspond donc à une transparence un peu plus forte; pour rendre la paroi aussi absorbante que possible à la transmission, il vaut mieux disposer la couche poreuse sur la face qui reçoit l'impact des ondes sonores. C'est d'ailleurs la disposition contraire qui est exigée par la considération de la réflexion à l'intérieur de l'enceinte, contradiction qui n'a pas grande importance pratique, la différence entre (3′) et (3″) étant en général faible.

Vérifications expérimentales. — La théorie précédente pouvait être confrontée à l'expérience de deux façons :

1° En mesurant les transparences de divers panneaux par la méthode décrite antérieurement [1], et en les comparant avec les bornes de la formule (2′). On peut prévoir que ces bornes, calculées en donnant à l'affaiblissement A ses valeurs extrêmes 0 et 1, ne serreront pas la réalité de très près; mais elles ont l'avantage d'être directement calculables à partir des propriétés mécaniques des constituants;

2° En utilisant (3′) ou (3″) et en y remplaçant $\mathfrak{a}$ par une valeur tirée de l'expérience. Cette valeur ne sera qu'approximative; il n'existe pas, en effet, à notre connaissance, de méthode pleinement satisfaisante pour mesurer les coefficients d'absorption à la réflexion pour une incidence normale; celle que nous avons utilisée au cours d'un travail non publié, et qui repose sur la mesure de l'absorption sous une incidence de 55°, est fondée sur le schème de Rayleigh : comme ce dernier, elle est critiquable en théorie, mais donne probablement des résultats approchés acceptables. L'approximation obtenue en utilisant (3′) et les $\mathfrak{a}$ ainsi mesurée, pour grossière qu'elle puisse être, sera meilleure que celle du premier procédé; les bornes seront certainement plus resserrées et, en fait, l'expérience montre qu'il suffit d'en calculer une (l'inférieure, par exemple).

Ceci posé, le tableau suivant indique la spécification sommaire et les coefficients $\mathfrak{a}$ mesurés au cours du travail auquel il a été fait allusion, pour sept panneaux différents, à revêtements à peu près homogènes; le support élastique était, dans tous les cas, une tôle d'aluminium de 1 mm d'épaisseur, divisée en mailles de 25 × 33 cm² (panneau n° 1 de l'étude de la plaque homogène).

Panneau n°	Nature du revêtement.	μ.	P.	$\mathfrak{a}$.				$\mathfrak{T} = \frac{0.32\,K}{ab\,\omega}\sqrt{P(P-\mathfrak{a})}$.			
				ω=1450.	4000.	5400.	13000.	ω=1450.	4000.	5400.	13000.
c..........	Feutre	0,20	0,9	0,54	0,18	0,45	0,44	0,022	0,011	0,0065	0,0028
d..........	Amiante	0,30	0,7	0,15	0,37	0,30	0,20	0,025	0,007	0,0057	0,0027
e..........	Feutre	0,35	0,9	0,43	0,24	0,52	0,61	0,026	0,011	0,0062	0,0023
f..........	Feutre encollé	0,45	0,8	0,35	0,26	0,35	0,25	0,024	0,011	0,0064	0,0029
g..........	Amiante	0,60	0,7	0,52	0,28	0,29	0,43	0,014	0,008	0,0057	0,0019
h..........	Laine de verre	0,72	0,8	0,44	0,41	0,60	0,43	0,021	0,008	0,0043	0,0024
i..........	Laine de verre agglomérée	0,90	0,7	0,47	0,18	0,25	0,25	0,016	0,0087	0,0060	0,0025

La figure 1 représente, en traits pleins, les transparences mesurées; en traits interrompus, les bornes théoriques suivant la formule (2′); en pointillé, les valeurs (3′) compte tenu des $\mathfrak{a}$ du tableau précédent. La théorie développée dans le paragraphe précédent ne pouvait rendre compte de tous

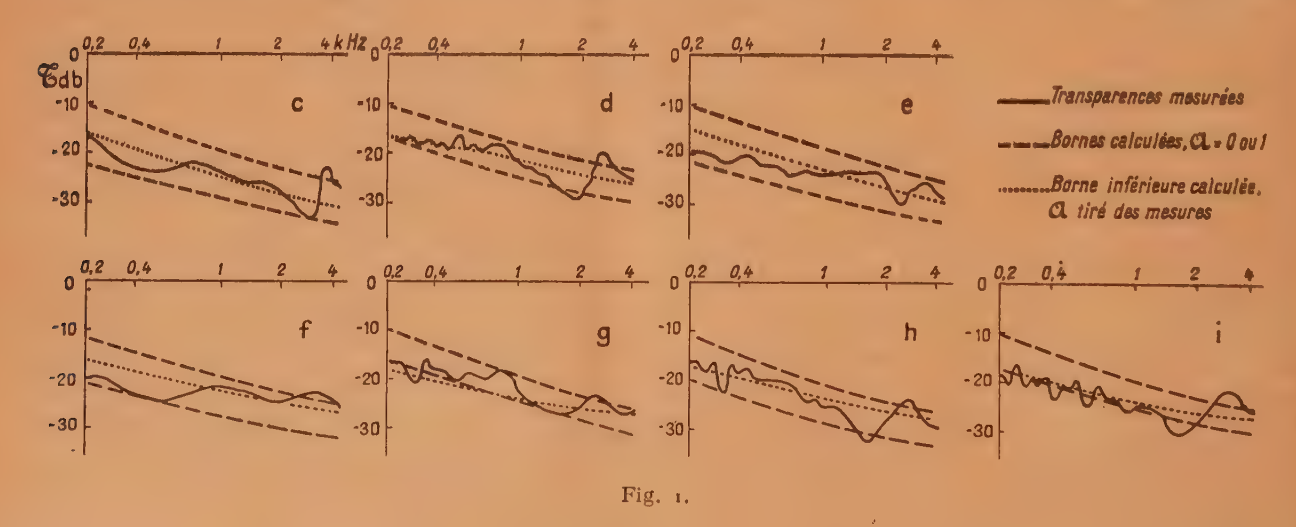


Fig. 1.

les détails de la caractéristique réelle, vu surtout le caractère approché des valeurs de $\mathfrak{a}$; mais, pour ce qui est de l'allure générale, l'accord paraît fort satisfaisant. Il semble donc permis de conclure que les formules (2′) et (3′) ou (3″) fournissent une représentation utilisable de ce phénomène très complexe qu'est la transparence au son d'une plaque composite mi-poreuse, mi-élastique.

Manuscrit reçu le 3 juin 1947.

DÉSINTÉGRATION DU NOYAU Be_9 PAR CHOC DES ÉLECTRONS RAPIDES

Par P. CALDIROLA.
Institut de Physique de l'Université de Pavie (Italie).

Sommaire. — On calcule la section efficace de désintégration du noyau Be_9 par choc d'électrons rapides, en prenant en considération les processus de transition par dipôle électrique et par dipôle magnétique. On confronte enfin les résultats des calculs avec la courbe expérimentale obtenue par Wiedenbeck.

1. Interprétation théorique du processus. — La désintégration du noyau Be_9 par choc d'électrons rapides a été observée expérimentalement la première fois par Collins, Waldman, Polye [1] et par la suite par Collins, Waldman, Guth [2]. Des mesures récentes particulièrement soignées faites par Wiedenbeck [3] ont enfin permis d'établir l'allure de la courbe de désintégration en fonction de l'énergie de l'électron incident pour des valeurs allant jusqu'à 3 MeV. On a trouvé que l'énergie de désintégration du processus, qui se produit par la réaction suivante

$$ {}^{9}_{4}\mathrm{Be} + e_{\nu} \rightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{0}n + e_{\nu'}, \qquad (1)$$

est 1,63 MeV et que la section efficace varie entre des valeurs inférieures à 10^{-31} cm² et des valeurs supérieures à 10^{-30} cm².

Au point de vue de la théorie, puisque le noyau Be_9 contient un neutron très faiblement lié (l'énergie de liaison est 1,63 MeV au lieu de 8-10 MeV environ, valeur en moyenne pour les autres éléments) on peut, comme a suggéré Guth [4], traiter le problème d'une manière très schématique : on suppose que le neutron faiblement lié se meut dans un champ de forces, qui représente l'action globale des autres particules fortement liées entre elles de manière à former l'ensemble Be_8 qu'on traite comme un point matériel doué de charge électrique. Cette schématisation est semblable à celle qu'on fait, à l'approximation d'ordre zéro, lorsqu'on traite les problèmes de structure atomique par la méthode du champ « self consistent » de Hartree.

La réaction (1) consiste en une transition du système nucléaire (Be_8,n) d'un état stationnaire discret (neutron lié) à un état du spectre continu (neutron libre). Cette transition peut s'effectuer à travers deux processus directs (¹) :

a. L'électron incident interagit avec le moment électrique du système (Be_8, n);

b. L'électron incident interagit avec le moment magnétique du système (Be_8, n).

Pour calculer la probabilité de ces transitions il est nécessaire de connaître l'état fondamental du neutron lié. Quelques données expérimentales mais surtout des raisons théoriques font admettre que l'état fondamental est un état $P_{\frac{3}{2}}$. En conséquence le processus *a* sera associé à la transition de l'état lié $P_{\frac{3}{3}}$ à un état du spectre continu $S_{\frac{1}{2}}$ tandis que le processus *b* à celle de l'état lié $P_{\frac{3}{2}}$, à l'état du spectre continu $P_{\frac{1}{2}}$. En prenant comme point de départ les considérations précédentes Mamachilosov [5] a développé des calculs détaillés : précisément, il a pris en considération le seul processus *a* et il a supposé qu'on peut représenter le champ de forces agissant sur le neutron faiblement lié comme un trou sphérique étroit de potentiel constant. Ces hypothèses étant admises et en prenant une largeur du trou de 5.10^{-13} cm, il obtient, dans le cas d'un électron incident de 1,72 MeV, une valeur de la section efficace de $0,48.10^{-31}$ cm² en accord satisfaisant avec les mesures expérimentales de Collins et coll.

Une vérification des calculs de Mamachilosov nous a permis de relever une petite erreur de calcul, dont la correction conduit à une diminution de la section efficace calculée de la valeur $0,48.10^{-31}$ à $0,21.10^{-31}$ cm². D'ailleurs il nous a paru que le processus *b* — négligé dans les calculs de Mamachilosov — pouvait avoir une certaine importance au moins pour les électrons incidents d'énergie peu au-dessus de la limite de désintégration. Enfin, les récentes mesures soignées de Wiedenbeck relatives à la variation de la section efficace en fonction de l'énergie de l'électron incident suggèrent l'opportunité d'étendre les calculs numériques à tout l'intervalle des énergies comprises entre 1,63 et 3 MeV. Une comparaison des résultats des calculs avec les données expérimentales pourra en effet décider, parmi d'autres questions, si la méthode du champ « self consistent » peut être appliquée avec succès

(¹) Il faut remarquer que la probabilité des processus indirects, tels que l'émission d'un rayon γ par l'électron dans le champ coulombien du noyau et l'absorption successive du rayon γ par le noyau, est négligeable en comparaison des processus *a* et *b* considérés dans ce travail.

à l'étude des propriétés des noyaux dans lesquels il y a une particule douée d'une énergie de liaison très faible.

2. Expression générale de la section efficace. — L'hamiltonien classique de l'interaction qui donne origine au processus a est le suivant

$$H_1 = Ze\Phi + Ze\left(\frac{\mathbf{v}_k}{c}, \mathbf{A}\right),$$

où Ze désigne la charge électrique du noyau, $\mathbf{v}_k$ la vitesse de l'ensemble Be_8 (considéré comme un point matériel), Φ et $\mathbf{A}$ sont les potentiels scalaire et vecteur décrivants le champ électromagnétique associé à l'électron en mouvement.

D'une manière analogue l'hamiltonien classique qui donne origine au processus b est le suivant

$$H_2 = \mathbf{M} . \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

où $\mathbf{M}$ est le moment magnétique du noyau, qu'on peut supposer concentré dans le neutron.

De l'expression de l'hamiltonien classique total $H = H_1 + H_2$ on passe immédiatement à celle de l'opérateur quantique correspondant en rappelant les expressions de Möller [6] pour les potentiels électromagnétiques associés à la transition entre l'état où il y a un électron d'énergie $W_0 = E_0 + mc^2$ et d'impulsion $\mathbf{p}_0$ et un autre état où il y a un électron d'énergie $W_1 = E_1 + mc^2$ et d'impulsion $\mathbf{p}_1$:

$$\Phi = \frac{4\pi\hbar^2 e \mathcal{A}_0 \exp^{\frac{i}{\hbar}[(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1).\mathbf{r} - (W_0 - W_1)t]}}{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)^2 - \left(\frac{W_0 - W_1}{c}\right)^2},$$

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi\hbar^2 e \mathcal{A} \exp^{\frac{i}{\hbar}[(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1).\mathbf{r} - (W_0 - W_1)t]}}{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)^2 - \left(\frac{W_0 - W_1}{c}\right)^2},$$

où

$$\mathcal{A}_0 = (u_0^* u_1), \qquad \mathcal{A} = (u_0^* \alpha u_1),$$

(u_0 et u_1 étant les fonctions à quatre composantes qui donnent les amplitudes des fonctions d'onde de Dirac pour l'électron avant et après le choc, et α étant l'opérateur bien connu de Dirac).

On fait le calcul des sections efficaces pour les processus a et b en généralisant opportunément les procédés développés respectivement par Bethe, Peierls [7] et par Peters, Richman [8] à propos du calcul des sections efficaces relatives aux processus correspondants dans la désintégration du deuton.

La section efficace pour une transition entre un état initial a et un état final b du spectre continu du système (Be_8, n) et simultanément entre un état initial 0 et un état final 1 de l'électron, s'écrit :

$$d\sigma(a, b) = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{W_0}{c^2 p_0} |H_{a,b}|^2 \rho_1 \, dW_1 \, d\Omega_1,$$

où

$$\rho_1 = \frac{p_1 W_1}{8\pi^3 \hbar^3 c^2}$$

est la densité (pour unité d'énergie) des états relatifs à l'électron diffusé dans l'élément d'angle solide $d\Omega_1$, et où l'on convient de normaliser en énergie la fonction propre de l'état final b du noyau. En substituant on trouve alors :

$$d\sigma(a, b) = \frac{4e^2 W_0 W_1}{\{(W_0 - W_1)^2 - c^2(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)^2\}^2} \times \frac{p_1}{p_0} \{I_1^2 + I_2^2\} \, dW_1 \, d\Omega_1, \qquad (2)$$

avec

$$I_1 = Ze \Sigma_\omega \int \Phi_b^* \exp^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1).\mathbf{r}_k} \left(\mathcal{A}_0 + \frac{1}{c}\mathcal{A}.\frac{\mathbf{P}_k}{M_k}\right) \Phi_a \, d\tau,$$

$$I_2 = \mu \, \Sigma_\omega \int \Phi_b^* \operatorname{rot}\left[\mathcal{A} \exp^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1).\mathbf{r}_n}\right] . \sigma \Phi_a \, d\tau.$$

Dans cette formule $\mathbf{r}$ (x_k, y_k, z_k) sont les coordonnées d'espace pour la particule Be_8, M_k sa masse et $\mathbf{P}_k = \frac{\hbar}{i} \operatorname{grad}_{r_n}$ son opérateur d'impulsion; $\mathbf{r}_n (x_n, y_n, z_n)$ sont les coordonnées d'espace du neutron, μ son moment magnétique et σ l'opérateur de spin de Pauli; enfin $\Phi_a (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_n; \omega_k, \omega_n)$ est la fonction d'onde (relative aussi aux coordonnées de spin) pour le noyau dans l'état initial a, et Φ_b ($\mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_n$ ω_k, ω_n), celle dans l'état final b du spectre continu normée de manière que :

$$\lim_{\Delta k \to 0} \frac{1}{\Delta k} \frac{dE_n}{dk} \int d\tau \left| \int_k^{k+\Delta k} \Phi_b \, dk' \right|^2 = 1$$

(E_n désigne l'énergie du neutron libre et $k = \frac{p_n}{2\pi\hbar}$).

Il faut encore observer que, comme on fait souvent dans des problèmes de cette nature, les électrons sont traités selon la théorie relativiste au contraire des particules nucléaires.

On obtient la section efficace totale à partir de (2) en faisant la moyenne $\left(\frac{1}{2} S_0\right)$ sur toutes les directions possibles du spin de l'électron incident, la sommation (S_1) sur toutes les directions du spin de l'électron diffusé, la moyenne $\left(\frac{1}{2j_A + 1} \Sigma_a\right)$ sur tous les états initiaux du noyau, la sommation (Σ_b) sur tous les états finaux, et encore en intégrant sur tout l'angle solide. On trouve :

$$\sigma_{tot} = \frac{e^4}{2j_A + 1} \int_{mc^2}^{W_0 - L} dW_1 \times \int d\Omega_1 \frac{W_0 W_1}{\{(W_0 - W_1)^2 - c^2(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)^2\}^2} \times \frac{p_1}{p_0} \Sigma_a \Sigma_b S_0 S_1 (I_1^2 + I_2^2), \qquad (3)$$

où L est l'énergie de liaison du neutron dans le noyau Be_9.

La formule (3) ne se prête pas à une évaluation directe; mais, puisque la longueur d'onde de de Broglie associée à l'électron est beaucoup plus grande

que les dimensions du noyau, on peut développer l'exponentielle contenu dans (3) en négligeant les termes petits d'ordre supérieurs. On obtient ainsi :

$$I_1 = Ze\frac{i}{\hbar}\Sigma_\omega \int \Phi_b^* \left\{ \left[\mathfrak{A}_0(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) + \frac{W_0 - W_1}{c}\mathfrak{A} \right] . \mathbf{r}_k \right\} \Phi_a \, d\tau, \quad (4)$$

$$I_2 = \mu \frac{i}{\hbar}\Sigma_\omega \int \Phi_b^* \{ (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \times \mathfrak{A} . \sigma \} \Phi_a \, d\tau. \quad (5)$$

Le terme I_1 est associé à la transition relative au dipôle électrique, I_2 à celle relative au dipôle magnétique. Nous évaluerons la contribution apportée par les deux termes à la valeur de la section efficace pour le processus de désintégration.

3. **Transition par dipôle électrique**. — En introduisant les coordonnées $\mathbf{r}(x, y, z)$ du neutron (de masses M_n) relatives à la particule Be_8, le terme (4) devient :

$$I_1 = \frac{i}{\hbar}\frac{M_n}{M_n + M_k}\left(\mathfrak{A}_0(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) + \frac{W_0 - W_1}{c}\mathfrak{A} \right) . (b|\mathbf{P}|a), \quad (6)$$

où

$$(b|\mathbf{P}|a) = Ze \int \Phi_b^* \mathbf{r} \Phi_a \, d\tau.$$

Nous allons maintenant calculer la contribution du terme I_1 à l'expression (3) de la section efficace. Nous pourrons faire cela en suivant des calculs développés par Wick [9] dans une étude sur l'excitation des noyaux par choc des électrons rapides.

En élevant au carré la (6) et en faisant la sommation sur toutes les directions du spin de l'électron avant et après le choc, on obtient

$$\begin{aligned} S_0 S_1 |I_1|^2 = \frac{1}{\hbar^2 W_0 W_1} \times \Big[& (W_0 W_1 + c^2 \mathbf{p}_0 . \mathbf{p}_1 + m^2 c^4) \times \left| (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) . (b|\mathbf{P}|a) \right|^2 \\ & + \left(\frac{W_0 - W_1}{c} \right)^2 (W_0 W_1 - c^2 \mathbf{p}_0 . \mathbf{p}_1 - m^2 c^4) \times \left| (b|\mathbf{P}|a) \right|^2 \\ & + 2(W_0 - W_1) \left\{ W_0 \left| \mathbf{p}_1 . (b|\mathbf{P}|a) \right|^2 - W_1 \left| \mathbf{p}_0 . (b|\mathbf{P}|a) \right|^2 \right\} \Big]. \end{aligned}$$

En sommant encore sur tous les états a et b, on a

$$\begin{aligned} \Sigma_a \Sigma_b S_0 S_1 |I_1|^2 = \frac{P_{AB}}{3\hbar^2 W_0 W_1} \times \Big[& (W_0 W_1 + c^2 \mathbf{p}_0 . \mathbf{p}_1 + m^2 c^4) \times (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)^2 \\ & + (W_0 W_1 - 3c^2 \mathbf{p}_0 . \mathbf{p}_1 - 5m^2 c^4) \times \left(\frac{W_0 - W_1}{c} \right)^2 \Big], \end{aligned}$$

où

$$P_{AB}^2 = \Sigma_a \Sigma_b \left| b|\mathbf{P}|a \right|^2.$$

L'intégration sur $d\Omega_1$ s'effectue facilement introduisant la variable

$$Q = \frac{1}{2m}\left[(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)^2 - \left(\frac{W_0 - W_1}{c} \right)^2 \right] = \frac{1}{mc^2}(W_0 W_1 - c^2 \mathbf{p}_0 . \mathbf{p}_1 - m^2 c^4).$$

On arrive enfin (en se souvenant que $j_A = 1$, qu'il y a un seul état final b, et que des trois états initiaux $P_{\frac{3}{2}}$ un seul se combine avec l'état final) à la formule

$$\sigma_{el} = \frac{4}{3}\frac{\pi e^4}{\hbar^2 c^2} Z^2 \left(\frac{M_n}{M_n + M_k} \right)^2 \int_{mc^2}^{W_0 - L} dW_1 |z_{AB}|^2 \times \left\{ -2\frac{p_1}{p_0} + \frac{W_0^2 + W_1^2}{c^2 p_0^2} \log \frac{W_0 W_1 + c^2 p_0 p_1 - m^2 c^4}{mc^2 (W_0 - W_1)} \right\} \quad (7)$$

avec

$$z_{AB} = \Sigma_\omega \int \Phi_a^* z \Phi_b \, d\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^\infty R_P r^3 \mathcal{R}_S \, dr,$$

où R_P est la fonction d'onde radiale de l'état P pour le neutron lié, tandis que $\mathcal{R}_S$ est celle de l'état S du spectre continu.

L'expression de σ_{el} obtenue par nous diffère légèrement de celle de Mamachilosov. Cette dernière, que nous croyons incorrecte, est deux fois la nôtre et contient, sous le symbole d'intégration, le terme $\frac{3}{2}\frac{p_1}{p_0}$ au lieu de $2\frac{p_1}{p_0}$.

4. **Transition par dipôle magnétique**. — On peut écrire l'expression (5) sous la forme suivante

$$I_2 = \frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \times \mathfrak{A} . (b|\mathbf{M}|a),$$

où

$$(b|\mathbf{M}|a) = \mu \Sigma_\omega \int \Phi_b^* \sigma \Phi_a \, d\tau.$$

En sommant sur toutes les directions initiales et finales du spin de l'électron on trouve

$$S_0 S_1 |I_2|^2 = \frac{1}{\hbar^2 W_0 W_1} \left\{ (W_0 W_1 - c^2 \mathbf{p}_0 . \mathbf{p}_1 - m^2 c^4) \times \left| (b|\mathbf{M}|a) \times (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \right|^2 + 2c^2 \left| (b|\mathbf{M}|a) . \mathbf{p}_0 \times \mathbf{p}_1 \right|^2 \right\}$$

En sommant encore sur tous les états a et b, on obtient

$$\begin{aligned} \Sigma_a \Sigma_b S_0 S_1 |I_2|^2 = \frac{2}{3\hbar^2 W_0 W_1 c^2} \times \Big\{ & (W_0 W_1 - c^2 \mathbf{p}_0 . \mathbf{p}_1 - m^2 c^4)^2 \\ & + (W_0 W_1 - c^2 \mathbf{p}_0 . \mathbf{p}_1 - m^2 c^4) \times (W_0^2 + W_1^2 - 2m^2 c^4) \\ & - (W_0 - W_1)^2 \Big\} M_{AB}^2, \end{aligned}$$

où

$$M_{AB}^2 = \Sigma_a \Sigma_b \left| b \,|\, \mathbf{M} \,|\, a \right|^2 = 3(M_z)_{AB}^2.$$

En évaluant l'intégration sur $d\Omega_1$ on arrive à

$$\sigma_{mg} = 4\pi \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \mu^2 \frac{1}{2 j_A + 1} \int_{mc^2}^{W_0 - L} dW_1 (M_z)_{AB}^2 \frac{p_0^2 + p_1^2}{p_0^2} \times \log \frac{W_0 W_1 + c^2 p_0 p_1 - m^2 c^4}{mc^2 (W_0 - W_1)}.$$

On peut trouver immédiatement les fonctions d'onde de tous les états possibles a et b en appliquant le procédé de la réduction des représentations bien connu à propos des problèmes de spectroscopie. On trouve ainsi

4 états a

$$\Phi_{a\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)} = R_P(r) Y_{11}(\vartheta, \varphi)\alpha(\omega),$$

$$\Phi_{a\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} R_P(r) \left\{ \sqrt{2}\, Y_{10}(\vartheta, \varphi)\alpha(\omega) + Y_{11}(\vartheta, \varphi)\beta(\omega) \right\},$$

$$\Phi_{a\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} R_P(r) \left\{ Y_{1-1}(\vartheta, \varphi)\alpha(\omega) + \sqrt{2}\, Y_{10}(\vartheta, \varphi)\beta(\omega) \right\},$$

$$\Phi_{a\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)} = R_P(r) Y_{1-1}(\vartheta, \varphi)\beta(\omega);$$

2 états b

$$\Phi_{b\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{R}_P(r) \left\{ - Y_{10}(\vartheta, \varphi)\alpha(\omega) + \sqrt{2}\, Y_{11}(\vartheta, \varphi)\beta(\omega) \right\},$$

$$\Phi_{b\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{R}_P(r) \left\{ -\sqrt{2}\, Y_{1-1}(\vartheta, \varphi)\alpha(\omega) + Y_{10}(\vartheta, \varphi)\beta(\omega) \right\}.$$

On peut maintenant observer que sont possibles seulement les transitions

$$a\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \to b\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad a\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \to b\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

pour lesquelles on a

$$(\sigma_z)_{ab} = \Sigma_\omega \int \Phi^*_{b\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \sigma_z \Phi_{a\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)} d\tau = \Sigma_\omega \int \Phi^*_{b\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)} \sigma_z \Phi_{a\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)} d\tau = \frac{\sqrt{2}}{3} X_{ab},$$

où

$$X_{ab} = \int R_P \mathcal{R}_P r^2 \, dr;$$

en conséquence on arrive à

$$\frac{1}{2 j_A + 1} (M_z)_{AB}^2 = \frac{1}{9} | X_{ab} |^2.$$

L'expression de la section efficace du processus de désintégration par transition de dipôle magnétique devient donc

$$\sigma_{mg} = \frac{4}{9} \pi \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \mu^2 \int_{mc^2}^{W_0 - L} dW_1 | X_{ab} |^2 \frac{p_0^2 + p_1^2}{p_0^2} \times \log \frac{W_0 W_1 + c^2 p_0 p_1 - m^2 c^4}{mc^2 (W_0 - W_1)}. \tag{8}$$

5. Évaluation de la section efficace. — Puisque nous avons supposé que le potentiel agissant sur le neutron est de la forme

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{pour } r \leq r_0, \\ 0 & \text{» } r \geq r_0, \end{cases}$$

l'*état fondamental P* sera caractérisé par la fonction d'onde

$$R_P(r) = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{\beta}} \dfrac{\sin \beta r - \beta r \cos \beta r}{r^2} & \text{pour } r \leq r_0, \\ \dfrac{b}{\sqrt{\alpha}} \dfrac{1 + \alpha r}{r^2} e^{-\alpha(r - r_0)} & \text{» } r \geq r_0, \end{cases}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2 m_n L}, \qquad \beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2 m_n (V_0 - L)}$$

$$\left(m_n = \frac{M_n M_k}{M_n + M_k} \right).$$

Les conditions de continuité nous donnent

$$b = -\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} a \sin \beta r_0, \qquad \operatorname{tg} \beta r_0 = \frac{\beta r_0}{1 + (1 + \alpha r_0) \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}};$$

tandis que pour la condition de normalisation on a

$$\frac{a^2}{2} \left\{ \beta r_0 + \left[(2 + \alpha r_0) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 + (1 + \alpha r_0) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 \right] \frac{\sin^2 \beta r_0}{\beta r_0} \right\} = 1.$$

Les relations précédentes permettent une détermination de la liaison entre r_0 et V_0. En particulier, si l'on prend $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$ cm, on a $V_0 = 11{,}96$ MeV.

L'*état S du spectre continu* est d'ailleurs caractérisé par la fonction d'onde

$$\mathcal{R}_S(r) = \begin{cases} \dfrac{c \sin \theta}{\sin l r_0} \dfrac{\sin l r}{r} & \text{pour } r \leq r_0, \\ \dfrac{c}{r} \sin \{ k(r - r_0) + \theta_S \} & \text{» } r \geq r_0, \end{cases}$$

où

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2 m_n E_n}, \qquad l = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2 m_n (E_n + V_0)}$$

et où l'énergie cinétique du neutron libre satisfait la relation

$$E_n + L = W_0 - W_1.$$

Les conditions de continuité nous donnent maintenant

$$\operatorname{tg} \theta_S = \frac{k}{l} \operatorname{tg} l r_0,$$

tandis que si l'on convient de normer les fonctions

en énergie, on a

$$c = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{2m_n}{\pi k}}.$$

L'*état P du spectre continu* est enfin caractérisé par la fonction d'onde

$$\mathcal{R}_P(r) = c'\,\frac{\sin lr - lr\cos lr}{r^2},$$

pour $r \leq r_0$;

$$\mathcal{R}_P(r) = c\,\frac{\sin\{k(r-r_0)+\theta_P\} - kr\cos\{k(r-r_0)+\theta_P\}}{r^2}$$

pour $r \geq r_0$.

Les conditions de continuité donnent :

$$c'\{\sin lr_0 - lr_0\cos lr_0\} = c\{\sin\theta_P - kr_0\cos\theta_P\},$$
$$c'\,l^2\sin lr_0 = ck^2\sin\theta_P,$$

tandis que, en normalisant comme d'habitude en énergie, on a

$$c = \frac{1}{\hbar k}\sqrt{\frac{2m_n}{\pi k}}.$$

On peut partir des expressions précédentes pour évaluer les éléments de matrices z_{AB} et X_{AB} qui interviennent dans (7) et (8). On en tire (*cf.* Mamachilosov) :

$$z_{AB} = \sqrt{\frac{2m_n}{3\pi}}\,\frac{1}{\alpha^2\hbar}\,\frac{(\gamma-1)^{\frac{1}{4}}}{\gamma^2}F(\gamma)$$

avec

$$\gamma = \frac{E_n+L}{L} = \frac{W_0-W_1}{L}, \qquad s = \frac{l}{\beta}\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\gamma},$$

$$F(\gamma) = -\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} a\sin\beta r_0\cos\theta_S \times\Big\{2+(1+\alpha r_0)\gamma + \frac{\alpha}{\beta}(2+\alpha r_0\gamma)\frac{\operatorname{tg} s\beta r_0}{s} + \Phi(s)\Big\},$$

$$\Phi(s) = \frac{(s^2-1)^2}{2s\sin\beta r_0\cos\beta r_0} \times\Big\{\frac{\sin(s+1)\beta r_0}{s+1} - \frac{\sin(s-1)\beta r_0}{s-1} + \frac{1}{(s+1)^2}\times[\sin(s+1)\beta r_0 - (s+1)\beta r_0\cos(s+1)\beta r_0] + \frac{1}{(s-1)^2}[\sin(s-1)\beta r_0 - (s-1)\beta r_0\cos(s-1)\beta r_0]\Big\};$$

et encore

$$X_{AB} = c'\frac{a}{\sqrt{\beta}}I_1 + c\frac{b}{\sqrt{\alpha}}I_2,$$

avec

$$I_1 = \int_0^{r_0}(\sin\beta r - \beta r\cos\beta r)\,\frac{\sin lr - lr\cos lr}{r^2}\,dr,$$

$$I_2 = \int_{r_0}^{\infty}(1+\alpha r)\frac{e^{-\alpha(r-r_0)}}{r^2}\Big[\sin\{k(r-r_0)+\theta_P\} - kr\cos\{k(r-r_0)+\theta_P\}\Big]dr.$$

Pour des électrons de faible énergie les calculs numériques deviennent très faciles puisque dans ce cas on peut introduire quelque simplification. En effet, on peut vérifier facilement qu'on a

$$\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\operatorname{tg} s\beta r_0}{s} \ll 1, \qquad \Phi(s) \ll 1, \qquad \cos\theta \simeq 1;$$

en conséquence, posant

$$A_\gamma = \frac{(E_0+1)^2 + (E_0+1-L\gamma)^2}{E_0^2+2E_0},$$

$$B_\gamma = \frac{\left\{\begin{array}{l}E_0(E_0+1-L\gamma)+(E_0-L\gamma)\\ \quad+(E_0^2+2E_0)^{\frac{1}{2}}\,|(E_0-L\gamma)^2+2(E_0-L\gamma)|^{\frac{1}{2}}\end{array}\right\}}{L\gamma},$$

$$C_\gamma = \frac{2\{(E_0-L\gamma)^2+2(E_0-L\gamma)\}^{\frac{1}{2}}}{(E_0^2+2E_0)^{\frac{1}{2}}},$$

$$D_\gamma = \frac{E_0^2+2E_0+(E_0-L\gamma)^2+2(E_0-L\gamma)}{E_0^2+2E_0}$$

(on mesure les énergies en unité mc^2), (7) nous donne

$$\sigma_{el} = \frac{32}{27}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 Z^2 r_0^2\left(\frac{M_n}{M_n+M_k}\right)^2 b^2 f(0) \times\left(\frac{E_0-L}{L}\right)^{\frac{3}{2}}(A\log B - C)_{\gamma=1}, \tag{7'}$$

où

$$f(0) = \frac{1}{\alpha^2 r_0^2}\left(1+\frac{1+\alpha r_0}{2}\right)^2.$$

A propos de (8) on peut encore observer qu'elle donne des valeurs non négligeables en comparaison de σ_{el} seulement pour $\frac{E_0-L}{L} \ll 1$. En ce cas, après avoir effectué une intégration numérique, on arrive pour σ_{mg} à l'expression suivante suffisamment approchée

$$\sigma_{mg} = \frac{8}{9}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2\mu^2\left(\frac{\hbar}{2M_nc}\right)^2\varphi(0)b^2 \times\left(\frac{E_0-L}{L}\right)^{\frac{1}{2}}(D\log B)_{\gamma=1}, \tag{8'}$$

où $\varphi(0)$ est une fonction plutôt compliquée des paramètres qui interviennent dans le problème : en particulier, pour les valeurs numériques que nous avons assumé on a $\varphi(0) \simeq 2$.

6. **Résultats des calculs et conclusions**. — Nous avons exécuté les calculs numériques pour évaluer la section efficace du processus de désintégration prenant comme point de départ les formules approximées (7') et (8') pour les électrons d'énergie inférieure à 1,73 MeV (0,10 MeV au-dessus de l'énergie critique de désintégration) et procédant à une évaluation numérique des intégrales qui interviennent dans la formule (7) pour les électrons à énergie supérieure. Les résultats de ces calculs sont représentés par les courbes des figures 1 et 2.

Précisément, sur la figure 1 on a reporté les courbes de désintégration relatives à la transition par dipôle électrique et à celle par dipôle magnétique. On peut constater comme le dernier processus est plus probable que le premier seulement pour des énergies très basses de l'électron incident, et précisément jusqu'à moins que 1,65 MeV (20 KeV au-dessus de la limite de désintégration); à 1,73 MeV, σ_{mg} est déjà réduite presqu'à 1/10 de σ_{el}, tandis qu'à des énergies supérieures on peut considérer σ_{mg} comme entièrement négligeable. Signalons toutefois que pour les valeurs des énergies pour lesquelles prévaut l'effet de la transition par dipôle magnétique, on a des sections efficaces très faibles. Dans la figure 2 on compare la courbe de désintégration en fonction de l'énergie des électrons incidents, telle qu'elle résulte par nos calculs, avec la courbe expérimentale de Wiedenbeck. Comme on peut constater, l'accord est assez bon et il pourrait être rendu encore meilleur en ajustant d'une manière opportune la valeur de r_0; mais nous n'avons pas jugé nécessaire de perfectionner les calculs dans cette direction.

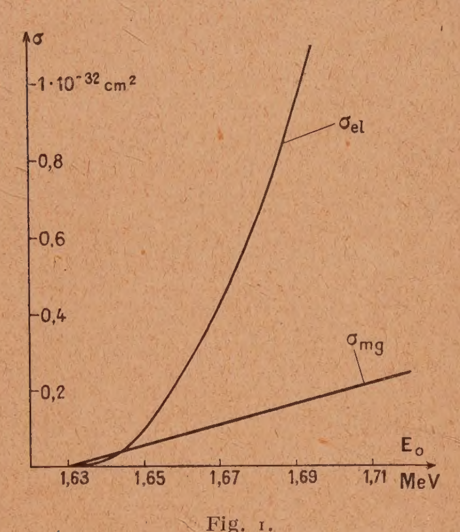


Fig. 1.

σ_{el}, section efficace de désintégration par transition de dipôle électrique;

σ_{mg}, section efficace de désintégration par transition de dipôle magnétique.

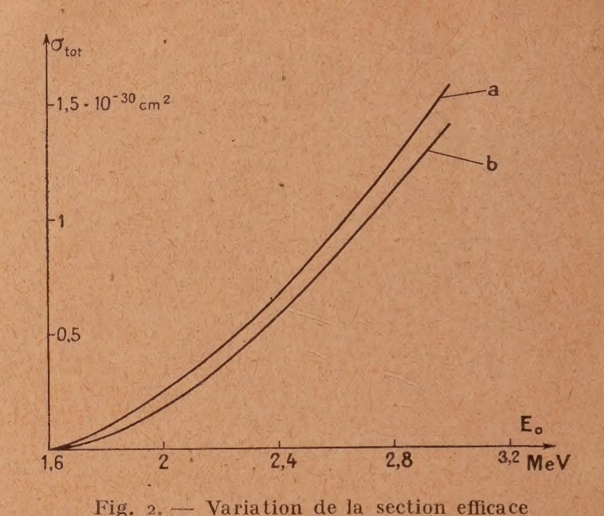


Fig. 2. — Variation de la section efficace de désintégration en fonction de l'énergie de l'électron incident.
a, courbe expérimentale (par Wiedenbeck); *b*, courbe calculée.

Pour finir, nous croyons que l'ensemble de nos calculs nous permet d'en tirer les conclusions suivantes :

a. Le modèle admis pour décrire le noyau de Be^9 est suffisamment approché pour le calcul des processus considérés dans ce travail;

b. Les résultats théoriques relatifs à la désintégration du Be^9 par choc des électrons rapides sont assez bien confirmés par l'expérience;

c. L'influence de la transition par dipôle magnétique dans le processus de désintégration du Be^9 par choc des électrons est importante seulement à des énergies quelque peu au-dessus de la limite de désintégration.

Manuscrit reçu le 15 mars 1947.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Collins, Waldman, Polye, *Phys. Rev.*, 1939, **55**, p. 412.
[2] Collins, Waldman, Guth, *Phys. Rev.*, 1939, **55**, p. 875.
[3] Wiedenbeck, *Phys. Rev.*, 1945, **69**, p. 236.
[4] Guth, *Phys. Rev.*, 1939, **55**, p. 411.
[6] Mamachilosov, *Journ. of. Phys. U. R. S. S.*, 1943, **7**, p. 239.
[5] Moeller, *Zeit. f. Phys.*, 1931, **70**, p. 785; *Ann. der Phys.*, 1932, **14**, p. 631.
[7] Bethe, Peierls, *Proc. Roy. Soc.*, 1936, A **148**, p. 145.
[8] Peters, Richman, *Phys. Rev.*, 1941, **59**, p. 804.
[9] Wick, *Ricerca Scientifica*, 1940, **11**, p. 49.

Le Gérant : Maurice Blondin. 125835 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1947.